

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ  
УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

**ЗАТВЕРДЖУЮ**  
Ректор \_\_\_\_\_ С.В. Іванов  
«    » \_\_\_\_\_ 2012 р.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**  
до практичних занять  
для студентів напряму підготовки  
6.050701 “Електротехніка та електротехнології”  
заочної форми навчання  
Частина 1.

Реєстраційний номер  
електронних методичних  
рекомендацій у НМВ

---

**СХВАЛЕНО**  
на засіданні кафедри  
електротехніки  
Протокол № 17  
від 23.05.12 р.

**Теоретичні основи електротехніки:** Метод. рекомендації до практичних занять для студ. напряму підготовки 6.050701 „Електротехніка та електротехнології” заочної форми навчання. Ч.1. /Уклад.: В.П. Шуліка, О.В. Журавков. – К.: НУХТ, 2012.– 62 с.

Рецензент **В.Ф. Резцов**, д-р техн. наук, проф.

Укладачі: **В.П. Шуліка**, кандидат техн. наук  
**О.В. Журавков**.

Відповідальний за випуск **О.Г. Мазуренко**, д-р техн. наук, проф.

## ВСТУП

Електротехнікою називається широка область науки і техніки, що розглядає закони функціонування та методи розрахунку різних електричних кіл. Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) – дисципліна, що займається питаннями розрахунку і вивчення явищ, що характеризуються поняттями електричних струмів, напруг, потужностей, магнітних потоків, а також поняттями напруженості електричного та індукції магнітного полів. Таким чином, ТОЕ є теоретичною базою усіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Видами аудиторних занять дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» є лекції, лабораторні і практичні заняття. Практичні заняття є дуже важливими для засвоєння теоретичного матеріалу, що розглядається на лекціях. У вказівках подано загальні теоретичні відомості й приклади вирішення практичних задач за шістьма темами, що пов'язані з розрахунком електричних кіл постійного струму, а саме розглянуті основні методи розрахунку електричних кіл постійного струму: за законами Кірхгофа, методом вузлових потенціалів, методом контурних струмів, методом накладання, методом еквівалентного генератора.

Також подано загальні теоретичні відомості й приклади вирішення практичних задач, що пов'язані з розрахунком електричних кіл синусоїдного струму тригонометричним і комплексним методом. Розглянуті приклади розрахунку нерозгалужених і розгалужених електричних кіл при резонансних явищах.

Ці рекомендації допоможуть студентам напрямів 6.050701 – «Електротехніка та електротехнології» набути навиків самостійного вирішення задач з дисципліни ТОЕ, підготуватися до лабораторних робіт і виконати контрольну роботу №1.

## ТЕМА I. РОЗРАХУНОК ПРОСТИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

### 1.1. Визначення струму на ділянці кола за законом Ома. Еквівалентне перетворення джерел енергії

Електричне коло – сукупність пристроїв, призначених для передачі, розподілу й взаємного перетворення електромагнітної та інших видів енергії та інформації, якщо процеси, що відбуваються у пристроях, можуть бути описані за допомогою понять про ЕРС, струм і напругу.

Основні елементи електричного кола:

- джерела електричної енергії – пристрої, що перетворюють механічну, теплову, хімічну та інші види енергії в електромагнітну (генератор, акумуляторна батарея тощо);
- перетворювачі електромагнітної енергії (трансформатори, перетворювачі частоти тощо);
- пристрої передачі електромагнітної енергії (лінії передачі);

– споживачі електромагнітної енергії, що перетворюють електромагнітну енергію в теплову, механічну, хімічну та інші види (двигуни, лампи розжарювання, резистори тощо).

Кола, в яких процеси отримання електричної енергії в джерелах, передача та перетворення в споживачах відбуваються при незмінних у часі струмах і напругах, називаються колами постійного струму.

В електротехніці електричне коло замінюють моделлю (графічним зображенням), яка називається електричною схемою. Елементами електричної схеми є активні і пасивні елементи.

До пасивних елементів (аналог споживачів електромагнітної енергії) відносять (рис.1.1):

- опір [Ом] – ідеалізований елемент, що приблизно замінює резистор, в якому відбувається перетворення електричної енергії в теплову;
- ємність [Ф] – ідеалізований елемент, що приблизно замінює конденсатор, в якому накопичується енергія електричного поля;
- індуктивність [Гн] – ідеалізований елемент, що приблизно замінює котушку індуктивності, в якій може накопичуватися енергія магнітного поля.

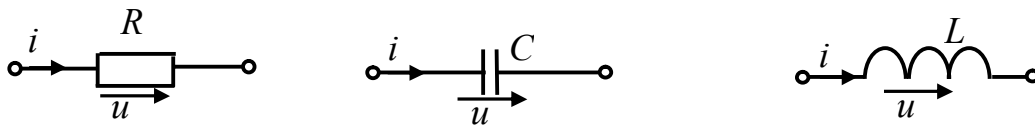


Рис.1.1

До активних елементів (аналог джерел електромагнітної енергії) відносять джерела електрорушійної сили  $E$  і джерела струму  $J$ .

Еквівалентне перетворення електричного кола – заміна всього кола або його частини еквівалентною схемою, що спрощує подальший розрахунок кола. Опори розгалуженого електричного кола можна замінити одним опором, який називають еквівалентним, або вхідним.

У таблиці 1 наведено різновиди з'єднань пасивних елементів.

Закон Ома пов'язує між собою струм  $I$ , що протікає через опір  $R$  ділянки електричного кола (рис.1.2,а), і напругу цієї ділянки  $U_{ab}$ .

$$I = \frac{U_{ab}}{R} \quad (1.1)$$

Якщо ділянка електричного кола містить джерело ЕРС  $E$  (рис.1.2,б), закон Ома матиме вигляд

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} \quad (1.2)$$

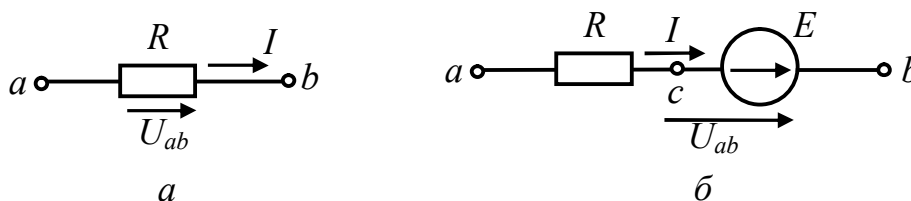


Рис.1.2

При розрахунку електричних кіл реальне джерело напруги з ЕРС  $E_0$  і внутрішнім опором  $R_0$ , що з'єднане з навантаженням, може бути представлено двома способами (рис.1.3). Ці схеми еквівалентні щодо потужності, яка споживається навантаженням, але не еквівалентні щодо потужності, яка споживається внутрішнім опором  $R_0$ .

Таблиця 1

Вид з'єднання	Графічне зображення на схемі	Еквівалентний опір
Послідовне		$R_e = R_{ab} = \sum_{i=1}^n R_i$
Паралельне		$R_e = R_{ab} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$ $I_{3ар} = \sum_{i=1}^n I_i$
Змішане		$R_e = R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$

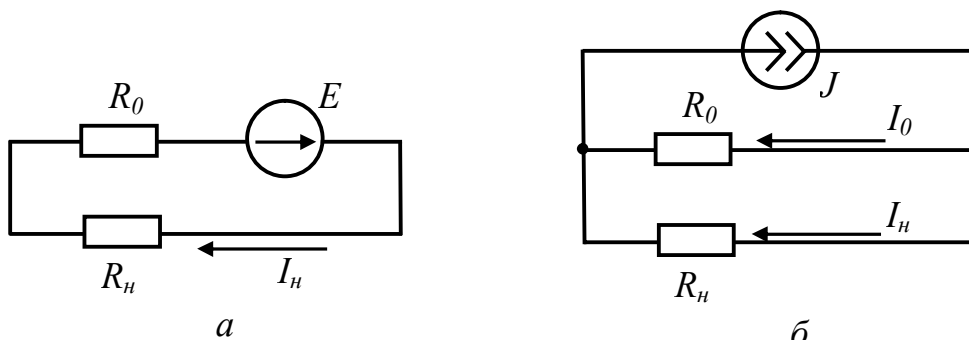


Рис.1.3

### Задача 1. Розрахунок струмів методом еквівалентних перетворень

Електрична схема, зображена на рис.1.4,а, має наступні параметри:  $E = 100 \text{ В}$ ,  $R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = R_4 = R_6 = R_8 = R_9 = 10 \text{ Ом}$ .

Визначити струми у вітках кола методом еквівалентних перетворень.

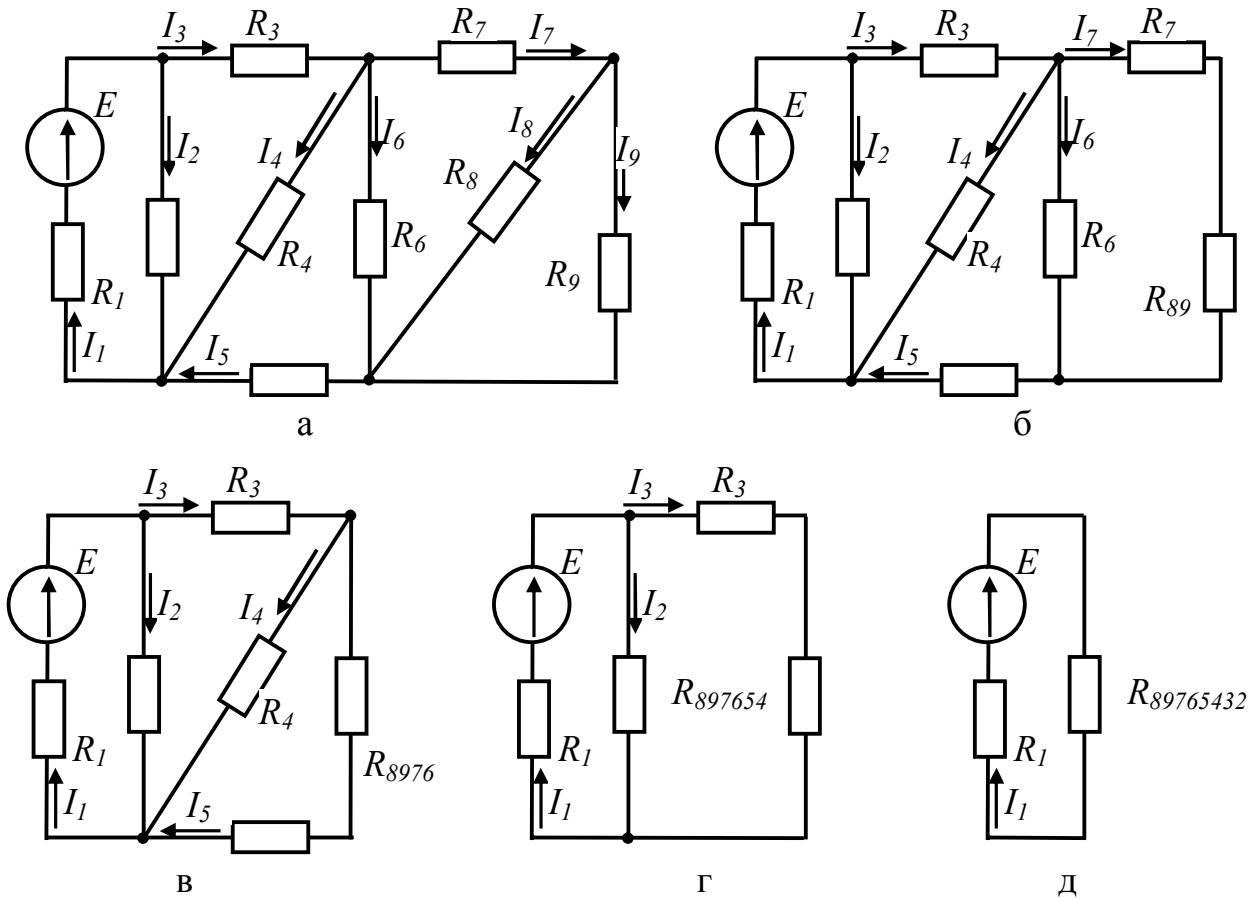


Рис.1.4

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методику еквівалентного перетворення електричного кола, а також закон Ома і «золоте» правило;
- вміти визначати послідовні й паралельні з'єднання елементів схеми.

### Вирішення

1. У схемі є одне джерело, тому вкажемо дійсні напрямки струмів у вітках кола. Починати еквівалентні перетворення схеми слід з найвіддаленішої від джерела вітки ( з кінця схеми ) і поступово рухатися до джерела. У схемі рис.1.4,а опори  $R_8$  і  $R_9$  з'єднані паралельно, тому їх еквівалентний опір

$$R_{89} = \frac{R_8 \cdot R_9}{R_8 + R_9} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом.}$$

Після заміни  $R_8$  і  $R_9$  одним опором одержимо схему рис.1.4,б. Опори  $R_7$  і  $R_{89}$  з'єднані послідовно, тому  $R_{897} = R_7 + R_{89} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом}$ . Вітки з  $R_6$  і  $R_{897}$  включені паралельно:  $R_{8976} = \frac{R_6 \cdot R_{897}}{R_6 + R_{897}} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом}$ . Після перетворення послідовного й паралельного з'єднань одержимо схему рис.1.4,в. Послідовно

включені опори  $R_5$  і  $R_{8976}$  об'єднаємо в еквівалентний  $R_{89765} = R_5 + R_{8976} = 5 + 5 = 10$  Ом, при цьому  $R_4$  і  $R_{89765}$  виявляються включеними паралельно:  $R_{897654} = \frac{R_4 \cdot R_{89765}}{R_4 + R_{89765}} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5$  Ом, тобто одержимо схему рис.1.4,г.

Послідовне з'єднання  $R_3$  і  $R_{897654}$  перетворимо в  $R_{8976543}$ , а потім паралельне з'єднання  $R_2$  і  $R_{8976543}$  у  $R_{89765432}$ , після чого одержимо схему рис.1.4,д:

$$R_{8976543} = R_3 + R_{897654} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{89765432} = \frac{R_2 \cdot R_{8976543}}{R_2 + R_{8976543}} = \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 5 \text{ Ом}.$$

У цій схемі опори  $R_1$  і  $R_{89765432}$  з'єднані послідовно. Поєднуючи їх, одержимо:  $R_e = R_1 + R_{89765432} = 5 + 5 = 10$  Ом.

2. Струм на вході схеми  $I_1 = \frac{E}{R_e} = \frac{100}{10} = 10$  А.

3. Для розрахунку всіх інших струмів поступово повернемося до вихідної схеми. За схемою рис.1.4,г знайдемо струми  $I_2$  і  $I_3$  за так званим «золотим» правилом:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{8976543}}{R_2 + R_{8976543}} = 10 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 5 \text{ А};$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{8976543}} = 10 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 5 \text{ А}.$$

За схемою рис.1.4,в аналогічно знайдемо струми  $I_4$  і  $I_5$ :

$$I_4 = I_3 \frac{R_{89765}}{R_4 + R_{897654}} = 5 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 2,5 \text{ А};$$

$$I_5 = I_3 \frac{R_4}{R_4 + R_{897654}} = 5 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 2,5 \text{ А}.$$

У схемі рис.1.4,б  $I_6 = I_5 \frac{R_{897}}{R_6 + R_{897}} = 2,5 \cdot \frac{10}{10 + 10} = 1,25$  А;

$$I_7 = I_6 = 1,25 \text{ А (тому що } R_6 = R_{897}).$$

У схемі рис.1.4,а опір  $R_8 = R_9$ , тому  $I_8 = I_9 = \frac{I_7}{2} = \frac{1,25}{2} = 0,625$  А.

## Задача 2. Еквівалентне перетворення джерел енергії

Схема, наведена на рис.1.5,а, має параметри елементів:  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 15$  Ом,  $J = 5$  А. Перетворити схему з джерелом струму в схему з джерелом ЕРС. Порівняти струми в обох схемах.

Визначити:

- струми у вітках схеми;
- струм в еквівалентній схемі;
- потужність, що споживається опорами цих схем.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати принцип еквівалентного перетворення джерел енергії;
- вміти користуватися законом Ома і «золотим» правилом.

Вирішення.

1. Вкажемо дійсні напрямки струмів у вітках схеми. Виконаємо розрахунок схеми рис.1.5,а методом еквівалентного перетворення, для чого замінимо паралельне з'єднання  $R_1$  і  $R_2$  одним еквівалентним опором:

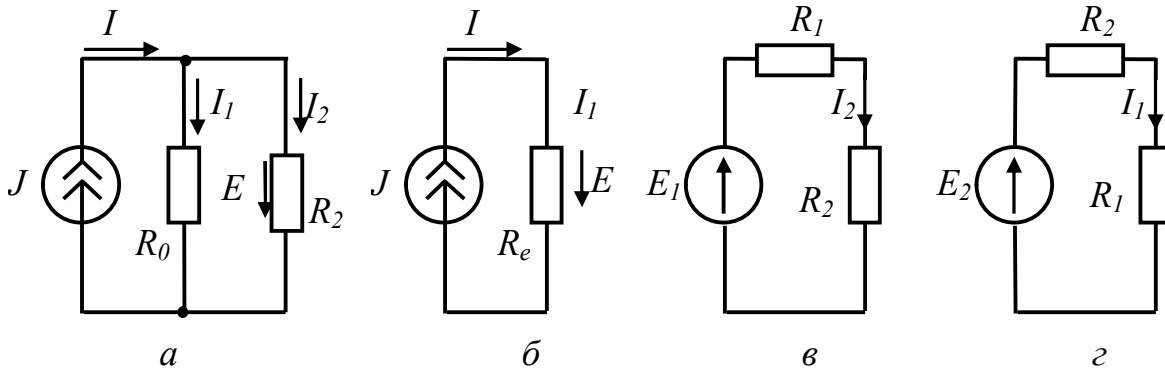


Рис.1.5

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2}; \quad R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150}{25} = 6 \text{ Ом}$$

і одержимо схему рис.1.5,б.

Струм у цій схемі дорівнює струму джерела  $I = J = 5 \text{ А}$ , напруга

$$U = R_e I = 6 \cdot 5 = 30 \text{ В.}$$

Напруга на паралельному з'єднанні в схемі рис.1.5,а також дорівнює  $U$ , тому струми у вітках кола визначають за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{30}{15} = 2 \text{ А.}$$

2. Потужність, що віддається джерелом струму у схемі рис.1.5,а:

$$P = R_e I^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ Вт.}$$

3. Перетворимо схему з джерелом струму в схему з джерелом ЕРС. Це перетворення можна виконати за схемою рис.1.5,в або за схемою рис.1.5,г. В схемі рис.1.5,в у якості внутрішнього опору джерела  $R_B$  прийняте  $R_1$ , тоді

$$E_1 = R_1 J = 10 \cdot 5 = 50 \text{ В.}$$

При цьому струм  $I_1$  не є істинним, а струм  $I_2$  залишається незмінним

$$I_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 2 \text{ А.}$$

4. Потужність, що віддається джерелом ЕРС  $E_1$  (яка споживається опорами)

$$P = (R_1 + R_2) I_2^2 = 25 \cdot 4 = 100 \text{ Вт.}$$

5. У схемі рис.1.5,г у якості  $R_B$  прийняте  $R_2$ , тоді

$$E_2 = R_2 J = 15 \cdot 5 = 75 \text{ В,}$$

струм  $I_2$  не є істинним, а струм  $I_1$  залишається незмінним

$$I_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = 3 \text{ А.}$$

6. Потужність, що віддається джерелом ЕРС  $E_2$ :

$$P = (R_1 + R_2) I_1^2 = 25 \cdot 9 = 225 \text{ Вт.}$$

Слід звернути увагу на те, що потужність, яка віддається джерелом струму в схемі рис.1.5,а не дорівнює потужностям, які віддаються джерелами ЕРС у схемах рис.1.5,в і рис.1.5,г. Таким чином з енергетичного погляду заміна нееквівалентна. При заміні джерела напруги джерелом струму потужність, що віддається джерелом, змінюється.



### Задача 3. Еквівалентне перетворення джерел енергії.

Ділянка електричного кола (рис.1.6,а) має два джерела струму і джерело ЕРС. Перетворити схему на ділянці 1-2, замінивши всі джерела одним джерелом:

- еквівалентним джерелом ЕРС;
- еквівалентним джерелом струму.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати принцип еквівалентного перетворення джерел енергії;
- вміти користуватися законом Ома.

Вирішення.

1. Перетворимо схему рис.1.6,а з джерелами струму в схему з джерелами ЕРС (рис.1.6,б)  $E_1' = R_1' J_1'$ ;  $E_1'' = R_1'' J_1''$ .

Знайдемо еквівалентний опір

$$R_e = R_1' + R_1'' + R_2$$

і еквівалентну ЕРС

$$E_e = E_1' + E_2' + E_2'' - E_1''.$$

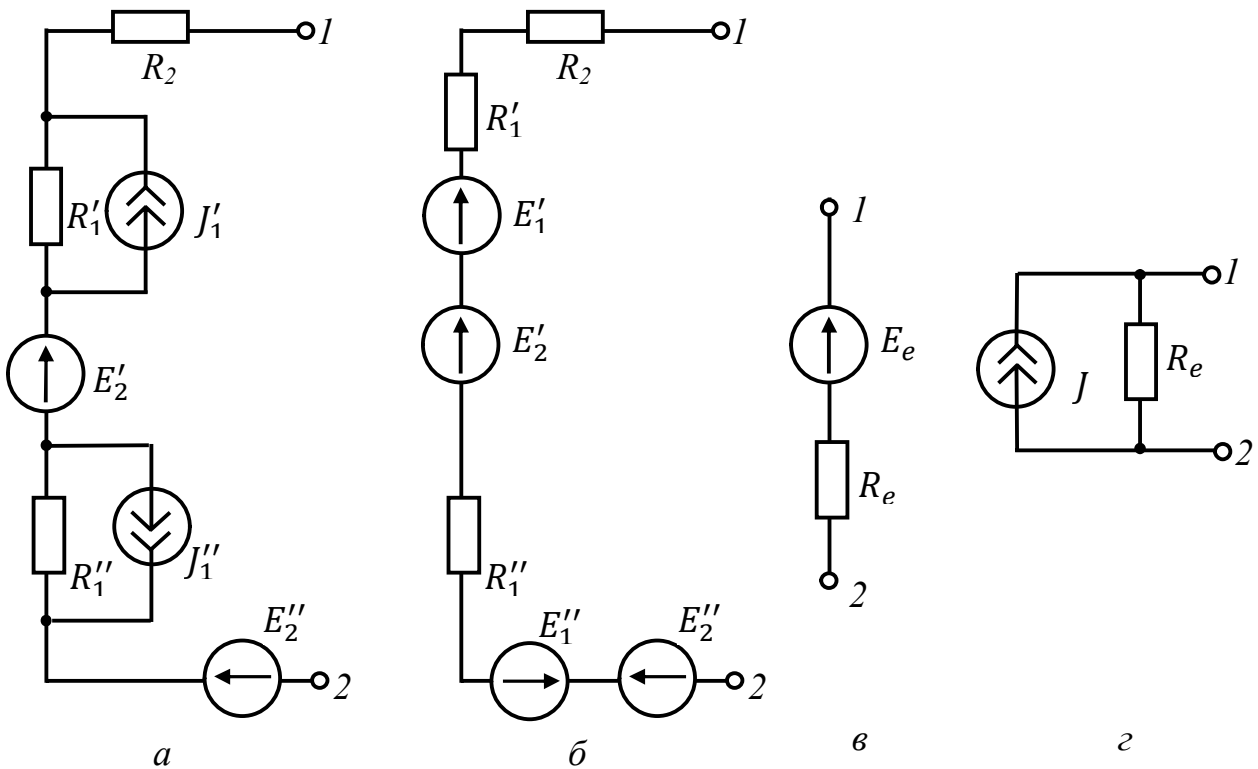


Рис.1.6.

2. Еквівалентна схема наведена на рис.1.6,в. Від схеми рис.1.6,в легко перейти до схеми з джерелом струму 1.6,г;  $J = \frac{E_e}{R_e}$ .

## ТЕМА 2. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ ЗА ЗАКОНАМИ КІРХГОФА. СКЛАДАННЯ БАЛАНСУ ПОТУЖНОСТЕЙ. ПОБУДОВА ПОТЕНЦІЙНОЇ ДІАГРАМИ.

### 2.1 Загальні відомості

Для вирішення задачі методом рівнянь Кірхгофа необхідно розібратися в топології схеми, визначити кількість віток і вузлів, обчислити кількість і скласти незалежні рівняння за першим і другим законами Кірхгофа, вказати додатні напрямки струмів у вітках кола, визначити незалежні контури в схемі і вказати напрямки обходу контурів.

Перший закон Кірхгофа виражає закон збереження заряду: алгебраїчна сума струмів віток, що сходяться у вузлі, в будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (2.1)$$

де  $k$  – номери віток, які зв'язані з даним вузлом. Якщо струм спрямований до вузла, то він входить у рівняння (2.1) зі знаком «+».

Другий закон Кірхгофа виражає закон збереження енергії: алгебраїчна сума напруг ділянок замкнутого контуру дорівнює нулю в будь-який момент часу:

$$\sum_{i=1}^p U_i = 0,$$

де  $i$  – номер ділянки, що входить у контур.

За першим законом Кірхгофа для схеми треба скласти  $q - 1$  рівнянь, де  $q$  – кількість вузлів у схемі.

За другим законом Кірхгофа треба скласти  $(p - q - 1)$  рівнянь, де  $p$  – кількість віток у схемі з невідомими струмами (якщо вітка містить джерело струму, то струм цієї вітки відомий). Отже, система рівнянь за законами Кірхгофа повинна мати стільки рівнянь, скільки невідомих струмів (віток).

*Порядок розрахунку струмів схеми за законами Кірхгофа.*

1. Визначаємо кількість вузлів і віток у схемі, а отже кількість рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа.

2. Довільно вибираємо напрямки струмів у вітках кола і напрямки обходу контурів.

3. складаємо і розв'язуємо систему відносно невідомих струмів.

Баланс потужностей електричної схеми складають на підставі закону збереження енергії: кількість тепла, що виділяється в опорах схеми, повинна дорівнювати кількості енергії, яка постачається за той самий час джерелами енергії, тобто потужність джерел енергії (напруги і струму) дорівнює потужності, що споживається опорами схеми:

$$\sum_{i=1}^k (\pm E_i I_i) + \sum_{i=1}^n J_i U_{ab} = \sum_{i=1}^l I_i^2 R_i, \quad (2.3)$$

де  $k$  – кількість ЕРС у схемі;  $n$  – кількість джерел струму у схемі;  $l$  – кількість опорів у схемі;  $U_{ab}$  – напруга між умовною точкою  $a$ , куди втікає струм джерела струму  $J_i$ , і умовною точкою  $b$ , звідки струм цього джерела струму витікає.

Правило складання балансу: якщо напрямок джерела ЕРС  $E_i$  і напрямок струму  $I_i$ , що протікає через нього, збігаються, то доданок  $(E_i I_i)$  беремо зі знаком «+», якщо навпаки – зі знаком «-».

*Потенційна діаграма* – це графік розподілу потенціалу вздовж замкненого контуру або ділянки кола. По осі абсцис відкладають опори вздовж контуру, один за одним, починаючи від довільно обраної точки, потенціал якої приймають рівним нулю. По осі ординат відкладають потенціали точок контуру.

**Задача 1. Визначення струмів розгалуженої схеми за законами Кірхгофа.**

Електрична схема, зображена на рис.2.1, має наступні параметри елементів:  
 $R_1 = 2 \text{ Ом}; R_2 = 3 \text{ Ом}; R_3 = 1 \text{ Ом}; R_4 = 2 \text{ Ом}; E_1 = 10 \text{ В}; E_2 = 5 \text{ В};$   
 $J_3 = 1 \text{ А}; J_4 = 2 \text{ А}.$

Визначити струми у всіх вітках схеми методом рівнянь Кірхгофа. Скласти баланс потужностей.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати закони Кірхгофа і порядок розрахунку струмів за цими законами;
- вміти користуватися методом виключень для вирішення систем лінійних рівнянь.

Вирішення. 1. Визначимо число віток і вузлів у схемі і вкажемо додатні напрямки струмів у вітках. Число віток без урахування віток з джерелами струму  $p = 4$ , число вузлів  $q = 3$ .

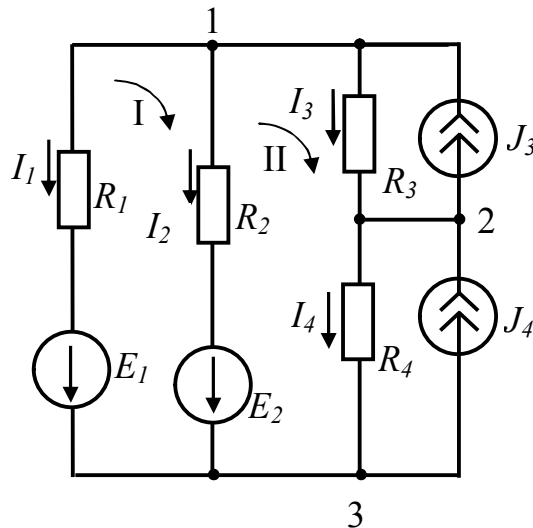


Рис.2.1

2. Для визначення чотирьох невідомих струмів за законами Кірхгофа потрібно скласти чотири рівняння:

за першим законом  $q - 1 = 3 - 1 = 2$  рівняння;

за другим законом  $p - (q - 1) = 2$  рівняння.

Кількість незалежних контурів  $k = 2$ . Незалежні рівняння першого закону Кірхгофа запишемо для 1-го і 2-го вузлів:

$$-I_1 - I_2 - I_3 + J_3 = 0;$$

$$I_3 - I_4 - J_3 + J_4 = 0.$$

Виберемо незалежні контури:  $R_1, R_2, E_2, E_1$  та  $R_2, R_3, R_4, E_2$  і вкажемо напрямки обходу (за годинниковою стрілкою). Рівняння для цих контурів мають вигляд:

$$\begin{aligned} -R_1 I_1 + R_2 I_2 &= -E_1 - E_2; \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_2 I_2 &= E_2. \end{aligned}$$

3. Джерела струму не входять у рівняння для контурів. Підставивши числові значення, одержимо чотири рівняння з чотирма невідомими струмами:

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 - I_3 + 1 = 0; \\ I_3 - I_4 - 1 + 2 = 0. \\ -2I_1 + 3I_2 = -10 - 5; \\ 1I_3 + 2I_4 - 3I_2 = 5. \end{cases}$$

Отримана система з чотирьох рівнянь не є повною, тому її зручно розв'язувати методом виключень.

4. Визначимо з останнього і передостаннього рівнянь струми  $I_1$  і  $I_4$  і підставимо їх у рівняння, що залишилися:

$$I_1 = \frac{15+3 \cdot I_2}{2}; \quad I_4 = I_3 + 1.$$

5. Одержимо систему з двох рівнянь з двома невідомими  $I_2$  і  $I_3$

$$\begin{cases} 15 + 3I_2 + 2I_2 + 2I_3 = 2; \\ I_3 + 2I_3 + 2 - 3I_2 = 5; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5I_2 + 2I_3 = -13; \\ -3I_2 + 3I_3 = 3. \end{cases}$$

6. Поділивши друге рівняння на 3, розв'яжемо систему за методом Крамера:

$$I_2 = -2,14 \text{ A}; \quad I_3 = -1,14 \text{ A}.$$

Визначимо струми  $I_1$  і  $I_4$ :

$$I_1 = \frac{15+3 \cdot (-2,14)}{2} = 4,29 \text{ A}; \quad I_4 = -1,14 + 1 = -0,14 \text{ A}.$$

7. Виконаємо перевірку розв'язання за першим законом Кірхгофа. Для перевірки слід використовувати рівняння для виключеного вузла, в даному випадку – це вузол 3:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_4 - I_3 &= 0; \\ 4,29 - 2,14 - 0,14 - 2 &\approx 0. \end{aligned}$$

8. Складаємо рівняння балансу потужностей:

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 + J_3 (R_3 I_3) + J_4 (R_4 I_4) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2.$$

Підставивши числові значення, одержимо:

$$10 \cdot 4,29 - 5(-2,14) + 1 \cdot 1(-1,14) + 2 \cdot 2(-0,14) = 2 \cdot (4,29)^2 + 3 \cdot (2,14)^2 + 1 \cdot (1,14)^2 + 2 \cdot (0,14)^2, \text{ або } 51,9 \text{ Вт} \approx 51,88 \text{ Вт}.$$

Тобто баланс виконується з достатньою для інженерних розрахунків точністю.

## Задача 2. Визначення параметрів розгалуженої схеми методом рівнянь Кірхгофа.

У схемі рис.2.2 параметри елементів мають такі значення:  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = R_4 = R_5 = 3 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_7 = 4 \text{ Ом}$ . Відомі струми у вітках:  $I_1 = 5 \text{ A}$ ;  $I_6 = 1 \text{ A}$ ;  $I_7 = 2 \text{ A}$  (для зазначених на схемі напрямків).

Визначити:

– ЕРС  $E_1, E_6$ ;

– опір  $R_2$ .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати закони Кірхгофа та порядок розрахунку за ними;
- вміти скласти рівняння балансу потужностей.

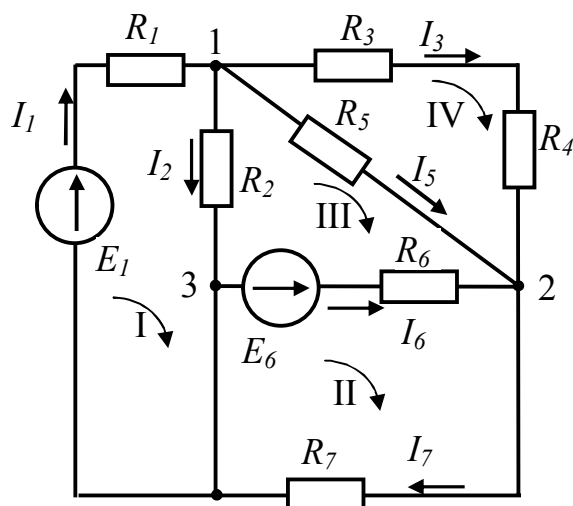


Рис.2.2

Вирішення.

1. Розв'яжемо задачу методом рівнянь Кірхгофа. Позначимо вузли схеми і вкажемо додатні напрямки невідомих струмів. У схемі 3 вузли і 6 віток. За законами Кірхгофа треба скласти шість незалежних рівнянь. Невідомих величин у задачі також шість:  $E_1, E_6, R_2, I_1, I_3, I_5$ . За першим законом Кірхгофа треба скласти  $(q - 1) = 2$  рівняння; за другим  $k = 6 - 2 = 4$  рівняння.

$$\text{вузол 1: } I_1 - I_2 - I_3 - I_5 = 0.$$

$$\text{вузол 2: } I_3 + I_5 + I_6 - I_7 = 0.$$

$$\text{контур I: } R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1.$$

$$\text{контур II: } R_6 I_6 + R_7 I_7 = E_6.$$

$$\text{контур III: } R_5 I_5 - R_2 I_2 - R_6 I_6 = -E_6.$$

$$\text{контур IV: } (R_4 + R_3) I_3 - R_5 I_5 = 0.$$

2. Знайдемо  $E_6$  з рівняння для другого контуру:

$$E_6 = R_6 I_6 + R_7 I_7 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 9 \text{ В.}$$

3. Розв'язуючи спільно рівняння для IV контуру і 2-го вузла знайдемо  $I_3$  і  $I_5$ :

$$\begin{cases} (R_3 + R_4) I_3 - R_5 I_5 = 0 \\ I_3 + I_5 + I_6 - I_7 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 6 I_3 - 3 I_5 = 0 \\ I_3 + I_5 = 1 \end{cases} \quad \text{звідси } I_5 = \frac{2}{3} \text{ А, } I_3 = \frac{1}{3} \text{ А.}$$

4. З рівняння для контуру III знайдемо  $R_2$ :

$$R_5 I_5 - R_2 I_2 - R_6 I_6 = -E_6,$$

або в числах:  $3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 1 - R_2 \cdot 5 = -9$ , звідки  $R_2 = \frac{10}{5} = 2 \text{ Ом.}$

5. З рівняння для 1-го вузла знайдемо струм  $I_1$ :

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_5 = 0, \text{ звідки } I_1 = 5 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 6 \text{ А.}$$

6. Рівняння для контуру I дозволяє знайти ЕРС  $E_1$ :  $E_1 = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 34 \text{ В.}$

7. Перевірка розрахунку за рівнянням балансу потужностей:

$$E_1 I_1 + E_6 I_6 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + (R_3 + R_4) I_3^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 + R_7 I_7^2$$

$$34 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = 4 \cdot 6^2 + 2 \cdot 5^2 + 6 \left( \frac{1}{3} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{2}{3} \right)^2 + 1 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2$$

$$213 \text{ Вт} \approx 213,2 \text{ Вт.}$$

### Задача 3. Побудова потенційної діаграми.

У схемі рис.2.3 дано:  $R_{B1} = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_{B2} = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 9,5 \text{ Ом}$ ,  $U_{ba} = 120 \text{ В}$ ,  $U_{ca} = 95 \text{ В}$ ,  $U_{da} = 100 \text{ В}$ . Визначити: покази вольтметрів  $V_1, V_2$ ; величини ЕРС  $E_1$  і  $E_2$ , скласти рівняння балансу потужностей, побудувати графік розподілу потенціалів уздовж для контуру  $a - b - c - d - a$  (потенційну діаграму).

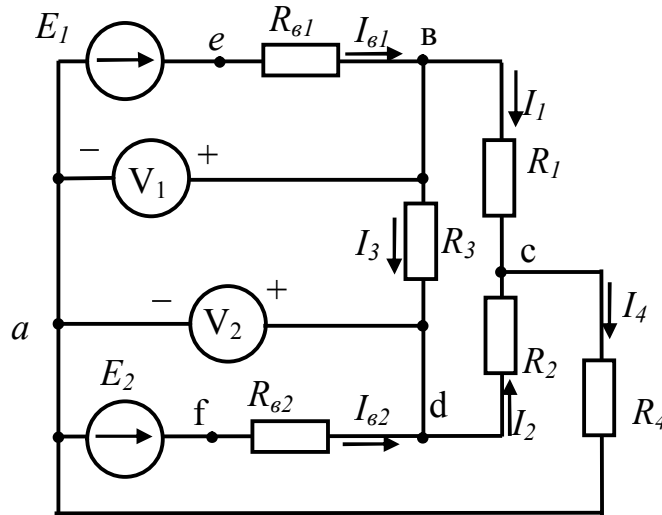


Рис.2.3

Для вирішення задачі необхідно:

- знати закони Ома і Кірхгофа й порядок розрахунку за ними;
- вміти складати рівняння балансу потужностей і будувати потенційну діаграму.

Вирішення.

1. Вольтметр  $V_1$  покаже напругу  $U_{ba} = 120 \text{ В}$ , а вольтметр  $V_2$  – напругу  $U_{da} = 100 \text{ В}$ . Струми у вітках знайдемо за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U_{bc}}{R_1} = \frac{U_{ba} - U_{ca}}{R_1} = \frac{120 - 95}{5} = 5 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{dc}}{R_2} = \frac{U_{da} - U_{ca}}{R_2} = \frac{100 - 95}{1} = 5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{bd}}{R_3} = \frac{U_{ba} - U_{da}}{R_3} = \frac{120 - 100}{2} = 10 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{U_{ca}}{R_4} = \frac{95}{9,5} = 10 \text{ А}.$$

2. З першого закону Кірхгофа:

$$I_{B1} = I_3 + I_1 = 10 + 5 = 15 \text{ А}; \quad I_{B2} = I_2 - I_3 = 5 - 10 = -5 \text{ А}.$$

3. З другого закону Кірхгофа:

$$E_1 = U_{ba} + R_{B1} I_{B1} = 120 + 15 \cdot 1 = 135 \text{ В};$$

$$E_2 = U_{da} + R_{B2} I_{B2} = 100 + 2(-5) = 90 \text{ В}.$$

4. Складаємо баланс потужностей. Потужність джерел ЕРС:

$$P_{дж} = E_1 I_{B1} + E_2 I_{B2} = 135 \cdot 15 + 90(-5) = 1575 \text{ Вт}.$$

Потужність, що споживається приймачами енергії:

$$P_{\text{сп}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_{\text{в1}} I_{\text{в1}}^2 + R_{\text{в2}} I_{\text{в2}}^2 =$$

$$= 5 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 10^2 + 9,5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 15^2 + 2 \cdot 5^2 = 1575 \text{ Вт.}$$

З порівняння  $P_{\text{дж}}$  і  $P_{\text{сп}}$  випливає, що баланс потужностей у колі виконується, отже розрахунки проведені правильно.

5. На рис. 2.4 наведена потенційна діаграма. На потенційній діаграмі показаний розподіл потенціалів уздовж контуру  $a - b - c - d - a$ . Потенціал точки  $a$  прийнятий рівним нулю. Потенціали інших точок контуру щодо точки  $a$ :

$$\varphi_e = E_1 = 135 \text{ В} ; \varphi_b = U_{\text{ва}} = 120 \text{ В} ; \varphi_c = U_{\text{са}} = 95 \text{ В} ; \varphi_d = U_{\text{да}} = 100 \text{ В} ;$$

$$\varphi_f = E_2 = 90 \text{ В.}$$

За віссю ординат відкладаємо величину потенціалу, за віссю абсцис – величину опору даної ділянки кола.

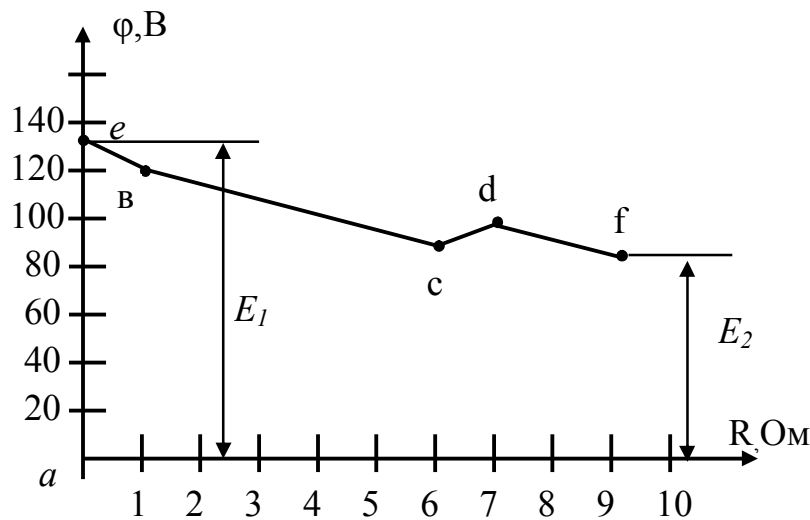


Рис.2.4

### ТЕМА 3. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ МЕТОДОМ КОНТУРНИХ СТРУМІВ.

#### 3.1. Загальні відомості.

Метод контурних струмів базується на другому законі Кірхгофа. Кількість рівнянь за цим методом дорівнює кількості незалежних контурів

$$k = p - (q - 1).$$

Доцільно складати рівняння для головних контурів. Оскільки в рівняннях за другим законом Кірхгофа джерела струму не враховуються, рекомендовано перетворити вихідну схему в схему з джерелами ЕРС. Однак можна і не перетворювати схему з джерелами струму. В такому випадку потрібно вважати, що струм джерела струму замикається по якомусь контуру, тобто є його контурним струмом. При цьому не слід записувати рівняння для контурів, що включають джерела струму, через те, що їх контурний струм вважається відомим.

Невідомими величинами на першому етапі є контурні струми. Контурний струм – це умовний розрахунковий струм, що нібито обтікає весь контур. На-

прямки контурних струмів вибирають довільно. Система розрахункових рівнянь, наприклад, для трьох незалежних контурів має вигляд:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  – невідомі контурні струми;  $R_{11}, R_{22}, R_{33}$  – власні контурні опори (у рівняння входять завжди зі знаком плюс);  $R_{12} = R_{21}, R_{13} = R_{31}, R_{23} = R_{32}$  – спільні контурні опори (у рівняння входять зі знаком плюс, якщо в спільних вітках контурні струми збігаються за напрямком, і зі знаком мінус, якщо не збігаються).  $E_{11}, E_{22}, E_{33}$  – контурні ЕРС – алгебраїчна сума ЕРС, що входять в  $i$  –ий контур, взята за напрямком контурного струму.

Загальне вирішення системи має вигляд

$$\begin{cases} I_{11} = E_{11} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \\ I_{22} = E_{11} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{23}}{\Delta} \\ I_{33} = E_{11} \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22} \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33} \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \end{cases} \quad (3.2)$$

де  $\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$  – головний визначник системи (3.2);

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} R_{22} & R_{23} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення, яке отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка і помноження отриманого результату на  $(-1)^{1+1}$ ;

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} R_{12} & R_{13} \\ R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення, яке отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка і помноження отриманого результату на  $(-1)^{1+1}$  і т.ін.

При розв'язанні задач методом контурних струмів рекомендується користуватися наступним алгоритмом:

1. Перетворити схему з джерелами струму в схему з джерелами ЕРС.
2. Вибрати незалежні контури і вказати напрямки контурних струмів.
3. За кількістю контурних струмів записати в загальному вигляді систему розрахункових рівнянь.
4. Визначити власні й спільні опори контурів, контурні ЕРС і підставити їх числові значення в систему рівнянь.
5. Розв'язати систему відносно контурних струмів.
6. За знайденими контурними струмами розрахувати дійсні струми віток.
7. Провести баланс потужностей для перевірки правильності розрахунку.



### Задача 1. Визначення струмів розгалуженої схеми методом контурних струмів

Розгалужена електрична схема, зображена на рис. 3.1,а, має параметри елементів:  $E_1 = 24 \text{ В}$ ,  $E_2 = 12 \text{ В}$ ,  $J_4 = 2 \text{ А}$ ,  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 3 \text{ Ом}$ . Визначити струми в схемі.

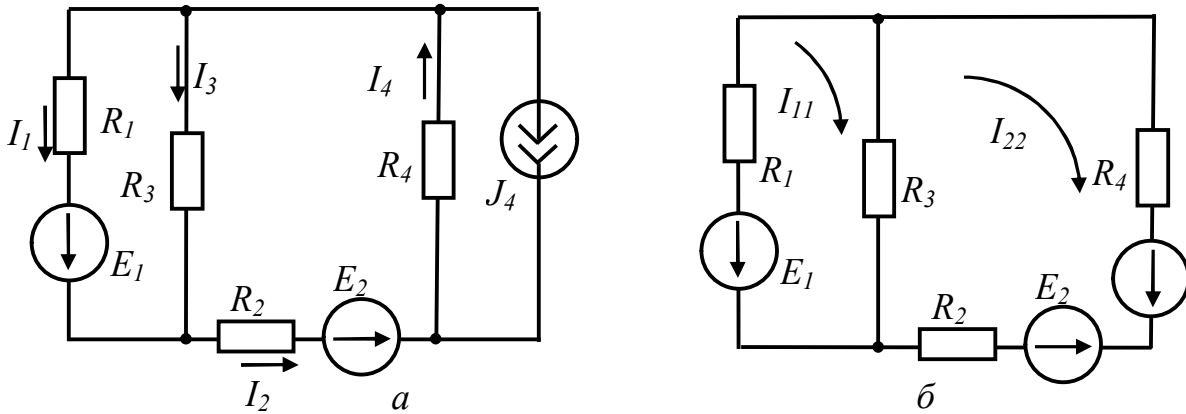


Рис.3.1

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу контурних струмів та його особливості;
- вміти розв'язувати систему лінійних рівнянь за допомогою визначників, а також перетворювати схему з джерелом струму на еквівалентну схему з джерелом ЕРС і складати баланс потужностей.

Вирішення.

1. Перетворимо схему з джерелом струму  $J_4$  ( $R_4$  –внутрішній опір) в еквівалентну схему з джерелом ЕРС. ЕРС еквівалентного джерела

$$E_4 = J_4 R_4 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ В}.$$

Після перетворення одержимо схему рис.3.1,б.

2. Виберемо незалежні контури і вкажемо (довільно) напрямки контурних струмів. За числом контурних струмів запишемо в загальному вигляді систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} = E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} = E_{22}. \end{cases}$$

3. Визначимо контурні, спільні опори і контурні ЕРС за схемою:

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 6 + 6 = 12 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_3 + R_2 + R_4 = 6 + 3 + 3 = 12 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -6 \text{ Ом};$$

$$E_{11} = -E_1 = -24 \text{ В}; E_{22} = E_4 - E_2 = 6 - 12 = -6 \text{ В}.$$

4. Знайдені числові значення підставимо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} 12I_{11} - 6I_{22} = -24 \\ -6I_{11} + 12I_{22} = -6. \end{cases}$$

Переведемо систему до вигляду

$$\begin{cases} 2I_{11} - I_{22} = -4 \\ -I_{11} + 2I_{22} = -1. \end{cases}$$

5. Розв'яжемо систему за допомогою визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3; \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 1 = -9;$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6;$$

$$I_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3 \text{ A}; \quad I_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2 \text{ A}.$$

6. Вкажемо додатні напрямки струмів у вітках і визначимо їх за контурними струмами:

$$I_1 = -I_{11} = 3 \text{ A}; \quad I_2 = -I_{22} = 2 \text{ A}; \quad I_3 = I_{11} - I_{22} = -1 \text{ A}.$$

7. Струм знайдемо з рівняння, складеного за першим законом Кірхгофа для вихідної схеми:

$$I_4 = J + I_2 = 2 + 2 = 4 \text{ A}.$$

8. Складемо рівняння балансу потужностей для перевірки правильності розрахунків:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + R_4 I_4 J_4 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2;$$

$$P_{дж} = 24 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120 \text{ Вт};$$

$$P_{сп} = 6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4^2 = 120 \text{ Вт}.$$

Баланс виконується  $P_{дж} = P_{сп}$ .

## Задача 2. Визначення струмів розгалуженої схеми з джерелами струму методом контурних струмів.

У схемі рис.3.2 задано:  $E_3 = 30 \text{ В}$ ,  $E_4 = 40 \text{ В}$ ,  $J_1 = 10 \text{ А}$ ,  $J_2 = 20 \text{ А}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 4 \text{ Ом}$ . Визначити струми у вітках кола не перетворюючи схему з джерелами струму в джерела ЕРС.

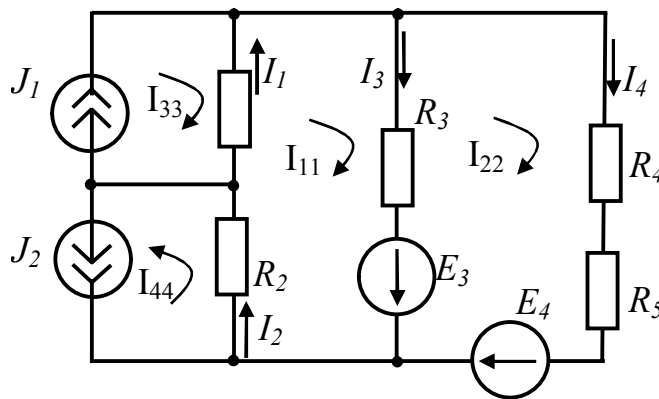


Рис.3.2

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу контурних струмів та його особливості;
- вміти розв'язувати систему лінійних рівнянь.

Вирішення.

1. Схема має 4 вітки і 3 вузли, тому незалежних контурів буде два.
2. Вкажемо додатні напрямки струмів у вітках кола і напрямки контурних струмів  $I_{11}$  і  $I_{22}$ . Два незалежні контури виберемо таким чином, щоб до них не

входили вітки з джерелами струму. Далі будемо вважати, що в опорі  $R_1$  крім контурного струму  $I_{11}$  протікає і контурний струм  $I_{33}$ , який дорівнює  $J_1$ , а в опорі  $R_2$  крім контурного струму  $I_{11}$  – контурний струм  $I_{44}$ , який дорівнює  $J_2$ . Напрямки  $I_{33}$  та  $I_{44}$  виберемо так, щоб вони співпадали з напрямками джерел струму.

3. Складемо систему рівнянь тільки для контурів I і II:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} + R_{14}I_{44} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} + R_{24}I_{44} = E_{22} \end{cases}$$

де  $I_{33} = J_1 = 10 \text{ A}$ ;  $I_{44} = J_2 = 20 \text{ A}$ .

4. Визначаємо контурні опори, спільні опори, контурні ЕРС за схемою:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 1 + 3 = 6 \text{ Ом}; \\ R_{22} &= R_3 + R_4 + R_5 = 3 + 5 + 4 = 12 \text{ Ом}; \\ R_{12} &= R_{21} = -R_3 = -3 \text{ Ом}; \quad R_{13} = R_{31} = -R_1 = -2 \text{ Ом}; \\ R_{23} &= R_{32} = 0 \text{ Ом}; \quad R_{14} = R_{41} = R_2 = 1 \text{ Ом}; \quad R_{24} = R_{42} = 0 \text{ Ом}; \\ E_{11} &= E_3 = 30 \text{ В}; \quad E_{22} = E_4 - E_3 = 10 \text{ В}. \end{aligned}$$

5. Підставивши в систему числові значення, одержимо:

$$\begin{cases} 6 I_{11} - 3 I_{22} - 20 \cdot 10 + 1 \cdot 20 = 30 \\ -3 I_{11} + 12 I_{22} = 10 \end{cases}$$

6. Вирішення системи дає наступні значення контурних струмів:

$$I_{11} = 6,19 \text{ A}; \quad I_{22} = 2,38 \text{ A}.$$

7. Знайдемо струми у вітках кола:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{33} = 6,19 - 10 = -3,81 \text{ A}; \quad I_2 = I_{11} + I_{44} = 6,19 + 20 = 26,19 \text{ A}; \\ I_3 &= I_{11} - I_{22} = 6,19 - 2,38 = 3,81 \text{ A}; \quad I_4 = I_{22} = 2,38 \text{ A}. \end{aligned}$$

### **Задача 3. Визначення потужності джерел ЕРС і струму з використанням методу контурних струмів.**

Задано параметри схеми рис.3.3,а:  $E_1 = 30 \text{ В}$ ,  $E_2 = 10 \text{ В}$ ,  $E_3 = 6 \text{ В}$ ,  $J_6 = 10 \text{ А}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 10 \text{ Ом}$ .  
Визначити потужності джерел ЕРС і струму.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу контурних струмів та його особливості;
- вміти розв'язувати систему лінійних рівнянь складати рівняння балансу потужностей.

#### **Вирішення.**

1. Для розрахунку потужностей необхідно обчислити струми у вітках. Розрахунок струмів виконаємо методом контурних струмів, перетворивши схему з джерелом струму  $J_6$  в еквівалентну схему з джерелом ЕРС  $E_6$  (рис.3.3,б). Схема на рис.3.3,б має три незалежних контури.

2. Система рівнянь для трьох контурів має вигляд:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22} \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33} \end{cases}$$

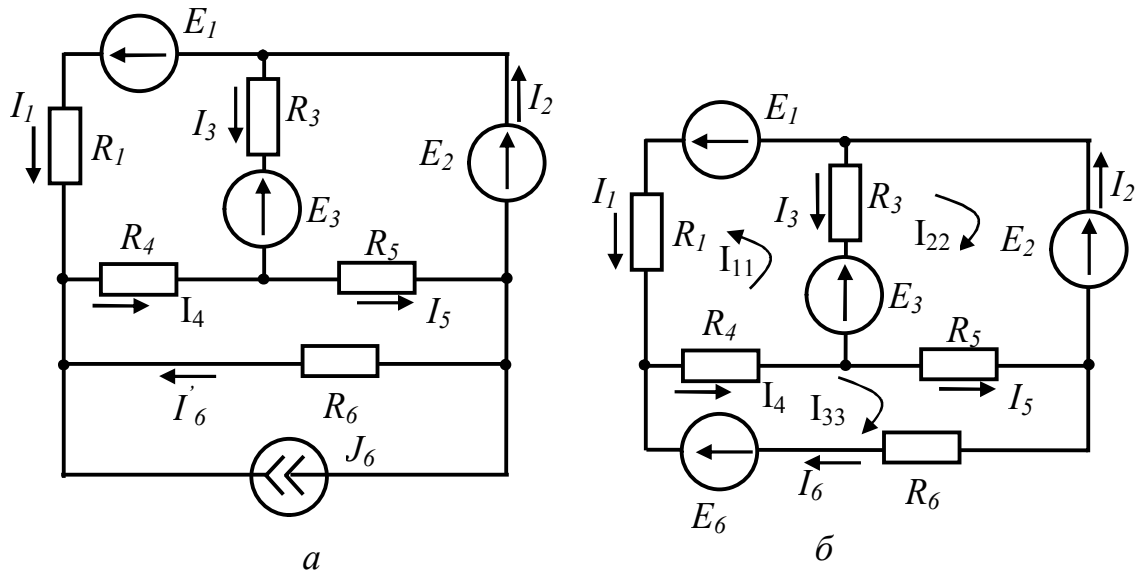


Рис.3.3

3. Визначимо контурні, спільні опори і контурні ЕРС за рис. 3.3,б:

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4 = 10 + 7 + 5 = 22 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_3 + R_5 = 7 + 15 = 22 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6 = 5 + 15 + 10 = 30 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = R_3 = 7 \text{ Ом}; \quad R_{13} = R_{31} = R_4 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_5 = -15 \text{ Ом};$$

$$E_{11} = E_1 + E_3 = 36 \text{ В}; \quad E_{22} = E_3 - E_2 = 6 - 10 = -4 \text{ В}; \quad E_{33} = E_6 = 100 \text{ В}.$$

4. Підставивши числові значення одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 22 I_{11} + 7 I_{22} + 5 I_{33} = 36 \\ 7 I_{11} + 22 I_{22} - 15 I_{33} = -4 \\ 5 I_{11} - 15 I_{22} + 30 I_{33} = 100. \end{cases}$$

Розв'язавши систему знайдемо значення контурних струмів.

$$I_{11} = -0,723 \text{ А}; \quad I_{22} = 3,646 \text{ А}; \quad I_{33} = 5,277 \text{ А}.$$

5. Визначаємо дійсні струми у вітках кола:

$$I_1 = I_{11} = -0,723 \text{ А}; \quad I_2 = -I_{22} = -3,646 \text{ А};$$

$$I_3 = -I_{22} - I_{11} = -3,646 + 0,723 = -2,923 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{33} + I_{11} = 5,277 - 0,723 = 4,554 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{33} - I_{22} = 5,277 - 3,646 = 1,631 \text{ А};$$

$$I_6 = I_{33} = 5,277 \text{ А}.$$

Визначимо струм  $I'_6$  у вихідній схемі

$$I'_6 = I_6 - J_6 = 5,277 - 10 = -4,723 \text{ А}.$$

6. Знайдемо потужності джерел:

$$P_1 = E_1 I_1 = 30 \cdot (-0,723) = -21,69 \text{ Вт};$$

$$P_2 = E_2 I_2 = 10 \cdot (-3,646) = -36,46 \text{ Вт};$$

$$P_3 = -E_3 I_3 = -6 \cdot (-2,923) = 17,54 \text{ Вт};$$

$$P_6 = -(J_6 R_6 I'_6) = -10 \cdot 10 \cdot (-4,723) = 472,3 \text{ Вт}.$$

Сумарна потужність джерел:

$$P_{\text{дж}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_6 = -21,69 - 36,46 + 17,54 + 472,3 = 431,7 \text{ Вт}.$$

7. Потужність теплових втрат в опорах (споживачах енергії):

$$P_{\text{сп}} = R_1 I_1^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 (I_6')^2 = \\ = 10 \cdot 0,723^2 + 7 \cdot 2,923^2 + 5 \cdot 4,554^2 + 15 \cdot 1,631^2 + 10 \cdot 4,723^2 = 431,7 \text{ Вт.}$$

#### ТЕМА 4. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ МЕТОДОМ ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ. МЕТОД ДВОХ ВУЗЛІВ.

##### 4.1 Загальні відомості.

Метод вузлових потенціалів базується на першому законі Кірхгофа. Кількість розрахункових рівнянь для нього дорівнює кількості рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа (q-1). Один із вузлів схеми приймаємо за базовий, його потенціал приймаємо нульовим. Невідомими величинами на першому етапі розрахунку є вузлові потенціали, тобто напруги між відповідним вузлом схеми і базовим. Вузлові потенціали завжди спрямовані від кожного вузла до базового.

Система розрахункових рівнянь, наприклад, для схеми з чотирма вузлами, має вигляд:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 = J_{11}; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 = J_{22}; \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = J_{33}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Тут  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – невідомі вузлові напруги (потенціали відповідних) вузлів;  $G_{11}, G_{22}, G_{33}$  – власні вузлові провідності;  $G_{12} = G_{21}, G_{23} = G_{32}, G_{13} = G_{31}$  – взаємні вузлові провідності;  $J_{11}, J_{22}, J_{33}$  – вузлові задавальні струми, що враховують джерела струму та джерела ЕРС віток, що підходять до вузла.

Вузлові струми визначають за формулою

$$J_{nm} = \sum_{k=1}^n \pm J_k + \sum_{k=1}^m \pm E_k G_k. \quad (4.2)$$

Іноді вихідну схему з джерелами ЕРС перетворюють у схему з джерелами струму, тоді не потрібно враховувати доданки виду  $G_m E_m$ , що фактично є еквівалентними джерелами струму.

Загальне вирішення системи має вигляд

$$\begin{cases} \varphi_1 = J_{11} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + J_{22} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + J_{33} \frac{\Delta_{13}}{\Delta}; \\ \varphi_2 = J_{11} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} + J_{22} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} + J_{33} \frac{\Delta_{23}}{\Delta}; \\ \varphi_3 = J_{11} \frac{\Delta_{31}}{\Delta} + J_{22} \frac{\Delta_{32}}{\Delta} + J_{33} \frac{\Delta_{33}}{\Delta}, \end{cases} \quad (4.3)$$

де  $\Delta = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}$  – головний визначник системи (4.1);

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} \\ G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення, яке отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і першого рядка і множення отриманого результату на  $(-1)^{1+1}$ ;

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} G_{12} & G_{13} \\ G_{32} & G_{33} \end{vmatrix}$  – алгебраїчне доповнення, яке отримують з головного визначника системи шляхом викреслювання першого стовпця і другого рядка і множення отриманого результату на  $(-1)^{1+2}$  і т. ін.

Після визначення із системи (4.3) потенціалів вузлів  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  знаходимо струми віток за законом Ома. Приклад складання рівнянь за законом Ома наведений нижче при розв'язанні конкретних задач.

При розв'язанні задачі методом вузлових потенціалів доцільно використовувати наступний алгоритм:

1. Вибираємо (довільно) базовий вузол і нумеруємо інші вузли.
2. Відповідно до кількості пронумерованих вузлів записуємо в загальному вигляді систему рівнянь.
3. Визначаємо власні й взаємні вузлові провідності, вузлові задавальні струми і підставляємо в систему рівнянь їх числові значення.
4. Будь-яким способом розв'язуємо систему рівнянь щодо вузлових потенціалів.
5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках схеми і знаходимо їх за законом Ома через вузлові потенціали.
6. Складаємо рівняння балансу потужностей і перевіряємо правильність розрахунків.

Коли у схемі два вузли – потрібне тільки одне рівняння для визначення потенціалу одного з вузлів:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sum_{k=1}^m \pm E_k G_k + \sum_{i=1}^m \pm J_k}{\sum_{k=1}^m G_k}, \quad (4.4)$$

де  $E_k, J_k, G_k$  – відповідно напруги ЕРС, струми джерел струму і провідності віток, що увімкнені між вузлами 1 та 2.

Останнє рівняння є основою методу двох вузлів, що застосовується для знаходження струмів у розгалужених схемах з двома вузлами. після визначення напруги між двома вузлами струми віток визначають за законом Ома.

### **Задача 1. Визначення струмів розгалуженої схеми методом вузлових потенціалів.**

У схемі рис.4.1 дано:  $E_1 = 120 \text{ В}$ ,  $E_2 = 170 \text{ В}$ ,  $E_4 = 80 \text{ В}$ ,  $J_3 = 1,5 \text{ А}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 40 \text{ Ом}$ . Визначити струми у вітках методом вузлових потенціалів. Виконати перевірку результатів за:

- рівняннями Кірхгофа;
- балансом потужностей.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу вузлових потенціалів та цього особливості;
- вміти розв'язувати систему лінійних рівнянь;
- використовувати закони Кірхгофа;
- вміти складати рівняння балансу потужностей.

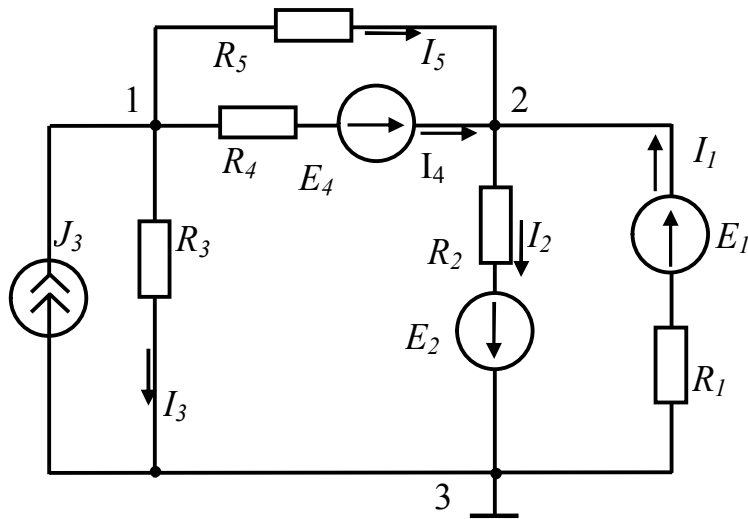


Рис.4.1

Вирішення.

1. Нумеруємо вузли і вибираємо за базовий вузол 3.

2. За кількістю пронумерованих вузлів записуємо в загальному вигляді вузлові рівняння у скалярній формі

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 = J_{11}; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 = J_{22}. \end{cases}$$

3. Визначаємо вузлові провідності та взаємні провідності за схемою кола:

$$G_{11} = G_3 + G_4 + G_5 = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = 0,1 \text{ См};$$

$$G_{22} = G_1 + G_2 + G_4 + G_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = G_4 + G_5 = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = 0,05 \text{ См}.$$

Вузлові задавальні струми також знаходимо за схемою:

$$J_{11} = J_3 - E_4 G_4 = 1,5 - \frac{80}{40} = -0,5 \text{ A};$$

$$J_{22} = E_4 G_4 + E_1 G_1 - E_2 G_2 = \frac{80}{40} + \frac{120}{10} - \frac{170}{20} = 5,5 \text{ A}.$$

4. Знайдені значення коефіцієнтів підставимо в систему вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} 0,1\varphi_1 - 0,05\varphi_2 = -0,5; \\ -0,05\varphi_1 + 0,2\varphi_2 = 5,5. \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь визначаємо невідомі потенціали.

$$\varphi_1 = 10 \text{ В}; \quad \varphi_2 = 30 \text{ В}.$$

5. Вказуємо додатні напрямки струмів у вітках і визначаємо їх за законом Ома:

$$I_1 = \frac{-\varphi_2 + E_1}{R_1} = \frac{-30 + 120}{10} = 9 \text{ A};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{170 + 30}{20} = 10 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1}{R_3} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_4}{R_4} = \frac{10 - 30 + 80}{40} = 1,5 \text{ A};$$

23

$$I_5 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{R_5} = \frac{10 - 30}{40} = -0,5 \text{ A}.$$

23

6. Виконаємо перевірку за законами Кірхгофа:

Для вузла 1 перший закон Кірхгофа має вигляд:

$$J_3 - I_3 - I_4 - I_5 = 0 \quad \text{або} \quad 1,5 - 0,5 - 1,5 + 0,5 = 0.$$

Для вузла 2:  $I_5 + I_4 - I_2 + I_1 = 0$  або  $-0,5 + 1,5 - 10 + 9 = 0$ .

Для контуру  $R_3, R_4, E_4, R_2, E_2$  другий закон Кірхгофа має вигляд:

$$\begin{aligned} R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_2 I_2 &= E_4 + E_2, \\ -20 \cdot 0,5 + 40 \cdot 1,5 + 20 \cdot 10 &= 80 + 170, \\ 250 &= 250. \end{aligned}$$

Для контуру  $R_4, E_4, R_5$  другий закон Кірхгофа має вигляд:

$$R_4 I_4 - R_5 I_5 = E_4, \quad 40 \cdot 1,5 + 40 \cdot (-0,5) = 80, \quad 80 = 80.$$

Для контуру  $R_1, E_1, R_2, E_2$ :  $R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 + E_2$ ,  $190 = 190$ .

7. Правильність розрахунків можна перевірити за рівнянням балансу потужностей:  $P_{дж} = P_{сп}$ .

$$\begin{aligned} P_{дж} &= E_4 I_4 + E_2 I_2 + E_1 I_1 + J_3 U_1 = \\ &= 80 \cdot 1,5 + 170 \cdot 10 + 120 \cdot 9 + 1,5 \cdot 10 = 2915 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{сп} &= R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 = \\ &= 10 \cdot 9^2 + 20 \cdot 10^2 + 20 \cdot 0,5^2 + 40 \cdot 1,5^2 + 40 \cdot 0,5^2 = 2915 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Баланс потужностей виконується, задача розв'язана правильно.

### Задача 2. Визначення струмів розгалуженої схеми методом вузлових потенціалів.

Параметри схеми рис.4.2 мають наступні значення;  $J = 5 \text{ А}$ ,  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_4 = 100 \text{ В}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 10 \text{ Ом}$ . Визначити струми у вітках методом вузлових потенціалів. Виконати перевірку за допомогою балансу потужностей.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу вузлових потенціалів та його особливості;
- вміти розв'язувати систему лінійних рівнянь а також складати рівняння балансу потужностей.

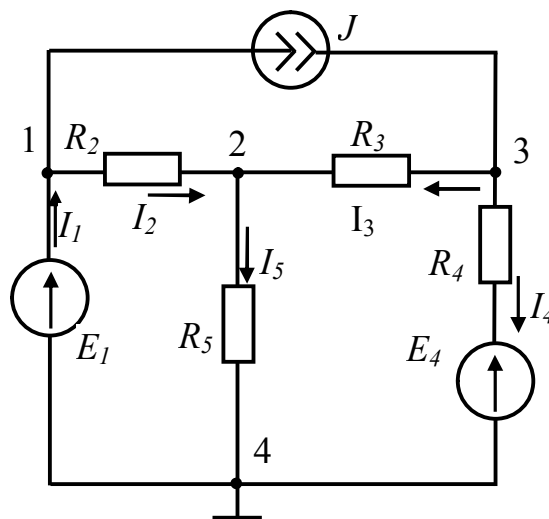


Рис.4.2



### Вирішення.

1. Пронумеруємо вузли, приймемо нижній вузол 4 за базовий.

2. Відповідно до кількості пронумерованих вузлів запишемо в загальному вигляді вузлові рівняння:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 = J_{11}; \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 = J_{22}; \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = J_{33}. \end{cases}$$

У вітці з ЕРС  $E_1$  відсутній опір, тому провідність першої вітки  $G_1 = \infty$ , а відповідно і  $G_{11} = G_1 + G_2 = \infty$ , тобто коефіцієнт  $G_{11}$  – невизначений. Однак  $\varphi_1 = E_1$ , тобто в системі вузлових рівнянь тільки два невідомих потенціали:  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$ . Для їх визначення досить двох рівнянь, що залишилися:

$$\begin{cases} -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 = J_{22}; \\ -G_{31}\varphi_1 - G_{32}\varphi_2 + G_{33}\varphi_3 = J_{33}. \end{cases}$$

3. Знайдемо вузлові провідності і вузлові струми за схемою кола:

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_5 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = 0,4 \text{ См};$$

$$G_{33} = G_3 + G_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = 0,25 \text{ См}; \quad G_{23} = G_{32} = G_3 = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = G_2 = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ См}; \quad G_{13} = G_{31} = 0 \text{ См};$$

$$J_{22} = 0 \text{ А}; \quad J_{33} = J + G_4 E_4 = 5 + \frac{100}{20} = 10 \text{ А}.$$

4. Підставивши знайдені числові значення в систему, одержимо:

$$\begin{cases} 0,4\varphi_2 - 0,2\varphi_3 = 5 \\ -0,2\varphi_2 + 0,25\varphi_3 = 10. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо:  $\varphi_2 = 54,17 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 83,33 \text{ В}.$

5. Струми у вітках схеми для зазначених додатних напрямків:

$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} = \frac{50 - 54,17}{10} = -0,417 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{R_3} = \frac{83,33 - 54,17}{5} = 5,832 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - 4}{R_4} = \frac{83,33 - 100}{20} = -0,833 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{\varphi_2}{R_5} = \frac{54,17}{10} = 5,417 \text{ А};$$

$$I_1 = I_2 + J = -0,417 + 5 = 4,583 \text{ А}.$$

6. Виконаємо перевірку за балансом потужностей  $P_{дж} = P_{сп}$ .

$$P_{дж} = E_1 I_1 - E_4 I_4 + J U_{31} =$$

$$= 50 \cdot 4,583 + 100(-0,833) + 5(83,33 - 50) = 479,1 \text{ Вт}$$

$$P_{сп} = R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 =$$

$$= 10 \cdot 0,417^2 + 5 \cdot 5,832^2 + 20 \cdot 0,833^2 + 10 \cdot 5,417^2 = 479,1 \text{ Вт}.$$

**Задача 3. Визначення струмів розгалуженої схеми методом двох вузлів.**

У схемі рис.4.3 дано:  $E_1 = 50 \text{ В}, E_2 = 40 \text{ В}, E_3 = 100 \text{ В}, R_1 = 10 \text{ Ом}, R_2 = 10 \text{ Ом}, R_3 = 20 \text{ Ом}, R_4 = 5 \text{ Ом}.$  Визначити струми у вітках схеми методом двох вузлів. Виконати перевірку вирішення за допомогою балансу потужностей.

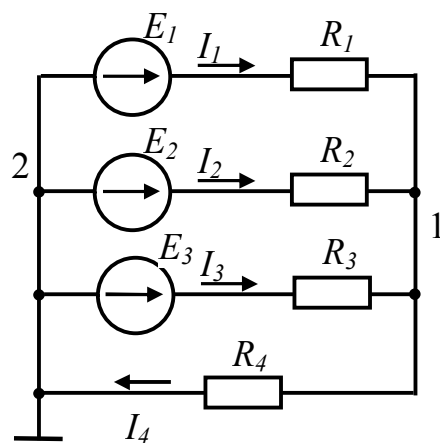


Рис.4.3

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу двох вузлів і його особливості;
- вміти розв’язувати систему лінійних рівнянь а також складати рівняння балансу потужностей.

Вирішення.

1. Для вирішення задачі доцільно скористатися методом двох вузлів. За формулою (4.4) напруга між вузлами 1 і 2 схеми дорівнює:

$$U_{12} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4} = \frac{\frac{50}{10} + \frac{40}{10} + \frac{100}{20}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 31,11 \text{ В.}$$

2. Струми у вітках схеми:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R_1} = \frac{50 - 31,11}{10} = 1,89 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{R_2} = \frac{40 - 31,11}{10} = 0,89 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{12}}{R_3} = \frac{100 - 31,11}{20} = 3,44 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{U_{12}}{R_4} = \frac{31,11}{5} = 6,22 \text{ А.}$$

3. Перевіримо розв’язок за рівнянням балансу потужностей:

$$P_{дж} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 =$$

$$= 50 \cdot 1,89 + 40 \cdot 0,89 + 100 \cdot 3,44 = 474,1 \text{ Вт.}$$

$$P_{сп} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 =$$

$$= 10 \cdot 1,89^2 + 10 \cdot 0,89^2 + 20 \cdot 3,44^2 + 5 \cdot 6,22^2 = 473,7 \text{ Вт.}$$

## ТЕМА 5. ВХІДНІ Й ВЗАЄМНІ ПРОВІДНОСТІ. ЗАСТОСУВАННЯ ЗАМІНИ КІЛЬКОХ ПАРАЛЕЛЬНИХ ВІТОК, ЩО МІСТЯТЬ ДЖЕРЕЛА ЕРС ТА ОПОРИ, ОДНІЮ ЕКВІВАЛЕНТНОЮ.

### 5.1. Загальні відомості

Вхідна провідність – відношення струму однієї вітки (вітка має номер  $k$ ) до ЕРС цієї ж вітки за умови закорочення ЕРС в інших вітках (позначення -  $G_{kk}$ ). Взаємна провідність ( $G_{km}$ ) – відношення струму однієї вітки (вітка має номер  $k$ ) до ЕРС іншої вітки (вітка має номер  $m$ ) за умови закорочення ЕРС в інших вітках. Визначають вхідні й взаємні провідності розрахунковим і експериментальним шляхами. Вхідні й взаємні провідності не залежать від величини джерел.

Принцип лінійності: якщо в лінійному електричному колі змінюється ЕРС однієї вітки (наприклад, ЕРС  $E_1$ ) або її опір (наприклад,  $R_1$ ), то струми чи напруги будь-яких віток схеми зв'язані між собою лінійними залежностями:

$$\begin{cases} I_{k(1)} = E_1' G_{k1} + A \\ I_{k(2)} = E_1'' G_{k1} + A \end{cases} \quad \begin{cases} I_{k(1)} = E_1' G_{kk} + B \\ I_{k(2)} = E_1'' G_{kk} + B \end{cases} \quad (5.1)$$

де  $A, B$  – сталі величини, що не залежать від  $E_1$  і  $E_k$ .

$I_{k(1)}, I_{k(2)}$  – струм  $k$ -ї вітки при значенні  $E_1 = E_1'$  та  $E_1 = E_1''$  відповідно.

З отриманих співвідношень, можна визначити вхідні й взаємні провідності віток:

$$G_{k1} = \frac{I_{k(1)} - I_{k(2)}}{E_1' - E_1''} = \frac{\Delta I_k}{\Delta E_1}, \quad G_{kk} = \frac{I_{k(1)} - I_{k(2)}}{E_k' - E_k''} = \frac{\Delta I_k}{\Delta E_k} \quad (5.2)$$

де  $G_{k1}$  – взаємна провідність  $k$ -ї та першої вітки.

Принцип взаємності: для будь-якого лінійного кола струм  $I_k$  в  $k$ -й вітці, який викликаний ЕРС  $E_m$ , що знаходиться в  $m$ -й вітці,  $I_k = E_m G_{km}$ , буде дорівнювати струму  $I_m$  в  $m$ -й вітці, що викликаний ЕРС  $E_k$ , яка знаходиться в  $k$ -й за умови, що  $E_k = E_m$  чисельно. Принцип взаємності визначається з рівності  $G_{mk} = G_{km}$  і  $E_k = E_m$ . Тобто:  $I_m = E_k G_{mk}$ ,  $I_k = E_m G_{km}$ , а отже  $I_k = I_m$ .

Припустимо, що ділянки схем рис.5.1,а і рис.5.1,б еквівалентні щодо струму  $I$  і потенціалів вузлів  $a, b$ . Тоді рівняння для  $E_{екв}$  і  $G_{екв}$  мають вигляд:

$$E_{екв} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{екв} = G_1 + G_2 + G_3. \quad (5.3)$$

Якщо деяка ЕРС  $E_i$  спрямована у протилежну сторону, ніж  $E_{екв}$ , то в чисельнику правої частини рівняння (5.2) добуток  $E_i G_i$  беремо зі знаком «-».

Примітка: якщо між вузлами  $a$  і  $b$  також ввімкнене джерело струму  $J$ , то в чисельник правої частини рівняння (5.2) додаємо «+J» (якщо струм джерела  $J$  струму втікає у вузол  $a$ ) або «-J» (якщо витікає з вузла).

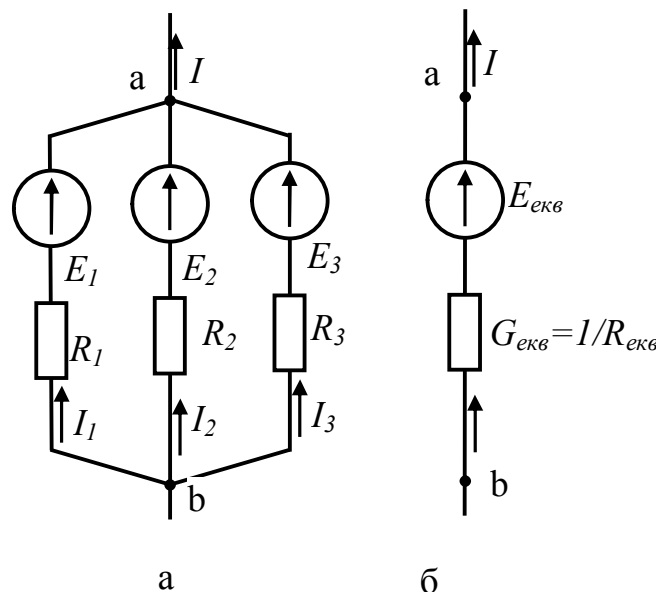


Рис.5.1

### Задача 1. Визначення вхідної і взаємної провідності схеми.

Схема рис.5.2 містить чотири джерела ЕРС  $E_1 \dots E_4$ . Виміряні струми у вітках цього кола для двох значень джерела ЕРС  $E_2$ ; при цьому значення всіх інших джерел ЕРС не змінювалися.

При  $E_2' = 20 \text{ В}$ :  $I_1' = 1,2 \text{ А}$ ;  $I_2' = 2,3 \text{ А}$ ;  $I_3' = 3,5 \text{ А}$ ;  $I_4' = 1,9 \text{ А}$ ;  $I_5' = 1,6 \text{ А}$ .

При  $E_2'' = 30 \text{ В}$ :  $I_1'' = 0,8 \text{ А}$ ;  $I_2'' = 2,8 \text{ А}$ ;  $I_3'' = 3,6 \text{ А}$ ;  $I_4'' = 2,2 \text{ А}$ ;  $I_5'' = 1,4 \text{ А}$ .

Визначити вхідну й взаємні провідності другої вітки.

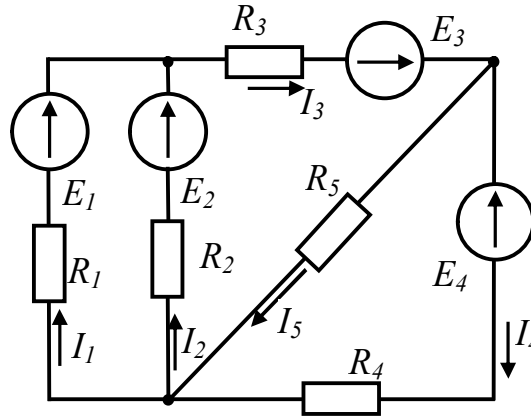


Рис.5.2

Для вирішення задачі необхідно:

- знати поняття вхідної і взаємної провідності і принцип взаємності;
- вміти використовувати закон Ома.

Вирішення.

1. Вхідна провідність другої вітки:

$$G_{22} = \frac{I_2'' - I_2'}{E_2'' - E_2'} = \frac{\Delta I_2}{\Delta E_2} = \frac{2,8 - 2,3}{10} = 0,05 \text{ См.}$$

2. Взаємні провідності другої вітки і всіх інших віток схеми:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{I_1'' - I_1'}{E_2'' - E_2'} = \frac{|\Delta I_1|}{\Delta E_2} = \frac{|0,8 - 1,2|}{10} = 0,04 \text{ См;}$$

$$G_{32} = G_{23} = \frac{I_3'' - I_3'}{E_2'' - E_2'} = \frac{|\Delta I_3|}{\Delta E_2} = \frac{|0,1|}{10} = 0,01 \text{ См;}$$

$$G_{42} = G_{24} = \frac{\Delta I_4}{\Delta E_2} = \frac{0,3}{10} = 0,03 \text{ См; } G_{52} = G_{25} = \frac{\Delta I_5}{\Delta E_2} = \frac{0,2}{10} = 0,02 \text{ См.}$$

### Задача 2. Визначення струму розгалуженої схеми методом заміни кількох віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною.

Електрична схема, зображена на рис.5.3,а, має наступні параметри:

$E_1 = 70 \text{ В}$ ,  $E_2 = 5 \text{ В}$ ,  $E_3 = 15 \text{ В}$ ,  $E_4 = 10 \text{ В}$ ,  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 3 \text{ Ом}$ . Знайти струм  $I_1$ , користуючись заміною паралельних віток, що містять ЕРС та опори, однією еквівалентною.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу заміни паралельних віток однією еквівалентною;
- вміти знаходити струм вітки за допомогою закону Ома.

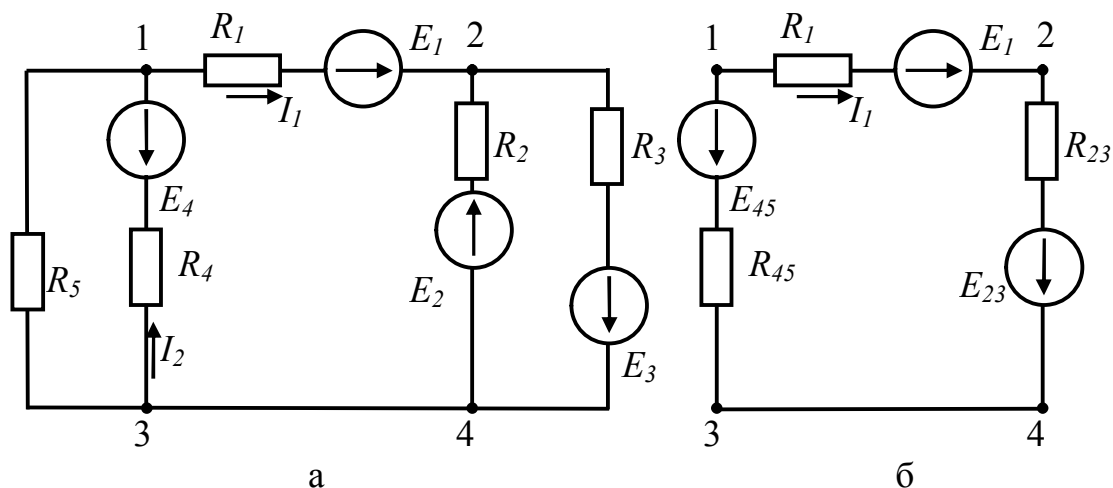


Рис.5.3

Вирішення.

1. Зробимо заміну паралельних віток схеми рис.5.3,а зліва й справа від вітки зі струмом  $I_1$  еквівалентними вітками, що містять еквівалентні опори і джерела ЕРС. Еквівалентна схема після заміни зображена на рис.5.3,б.

2. Знайдемо еквівалентні значення опорів  $R_{23}$  і  $R_{45}$ , а також напруги еквівалентних джерел ЕРС  $E_{23}$  і  $E_{45}$ , користуючись принципом взаємності:

$$G_{23} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0,2 \text{ См}; \Rightarrow R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Ом};$$

$$G_{45} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 0,533 \text{ См}; \Rightarrow R_{45} = \frac{1}{G_{45}} = \frac{1}{0,533} = 1,875 \text{ Ом};$$

$$E_{23} = \frac{\frac{E_2 + E_3}{R_2 + R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{5 + 15}{10 + 10}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 5 \text{ В}; \quad E_{45} = \frac{\frac{E_4}{R_4}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3}} = 3,8 \text{ В};$$

3. За законом Ома струм  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{E_1 + E_{23} - E_{45}}{R_1 + R_{23} + R_{45}} = \frac{70 + 5 - 3,8}{5 + 5 + 1,875} = 5,996 \approx 6 \text{ А}.$$

### Задача 3. Визначення струму розгалуженої схеми за допомогою принципу взаємності.

У схемі рис.5.4,а дано:  $E = 24 \text{ В}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 2,3 \text{ Ом}$ . Визначити струм  $I_5$  у схемі за допомогою принципу взаємності.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу заміни паралельних віток однією еквівалентною;
- вміти знаходити струм вітки за допомогою законів Ома і Кірхгофа.

Вирішення.

1. У вихідній схемі немає ні паралельно, ні послідовно з'єднаних опорів і струм  $I_5$  у цій схемі розраховувати незручно. На підставі принципу взаємності задачу можна простіше розв'язати в такий спосіб. Перенесемо ЕРС  $E$  у вітку з  $R_5$ , а струм будемо шукати у вітці, де раніше була включена ЕРС  $E$  (рис.5.4,б).

У новій схемі з'явилися паралельні вітки з  $R_1$  та  $R_2$ , а також з  $R_3$  та  $R_4$ . При цьому струм  $I'$  буде дорівнювати струму  $I_5$ . За законом Ома:

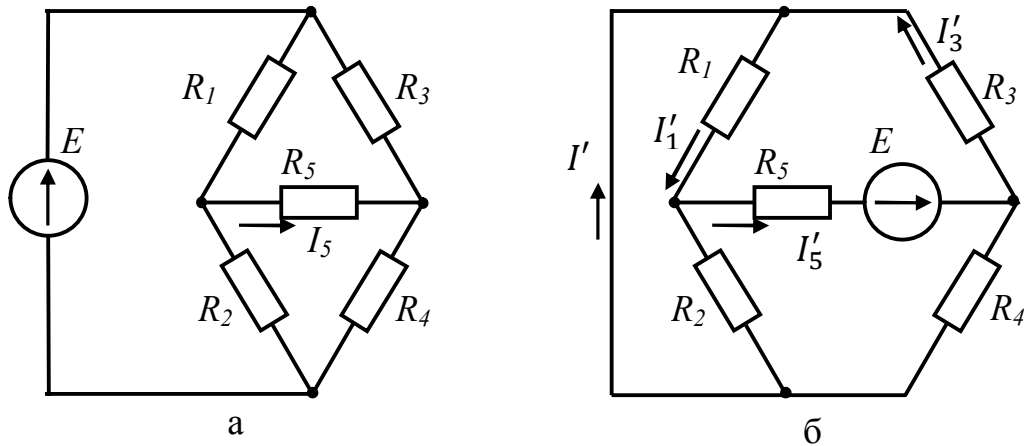


Рис.5.4

$$I'_5 = \frac{E}{R_5 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{24}{2,3 + \frac{2 \cdot 8}{10} + \frac{3 \cdot 7}{10}} = 4 \text{ A.}$$

2. Знайдемо струми в паралельних вітках:

$$I'_1 = I'_5 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4 \cdot \frac{8}{10} = 3,2 \text{ A}; \quad I'_3 = I'_5 \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 4 \cdot \frac{3}{10} = 1,2 \text{ A.}$$

3. За першим законом Кірхгофа визначимо струм  $I'$ , який дорівнює струму  $I_5$  вихідної схеми:

$$I' = I_5 = I'_1 - I'_3 = 3,2 - 1,2 = 2 \text{ A.}$$

## ТЕМА 6. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ МЕТОДОМ НАКЛАДАННЯ, РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ МЕТОДОМ ЕКВІВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

### 6.1 Загальні відомості

В основі методу накладання лежить принцип суперпозиції. Розрахунок кола цим методом роблять у такий спосіб: по черзі розраховують струми у вітках, що виникають при дії кожного джерела окремо (часткові струми), а потім знаходять струми у вітках вихідної схеми шляхом алгебраїчного додавання часткових струмів. При розв'язанні рекомендується зображувати часткові схеми з одним джерелом для розрахунку часткових струмів. У цих схемах тільки одне джерело, через те їх розрахунок доцільно виконувати, використовуючи еквівалентні перетворення і закон Ома, при цьому на схемах необхідно вказувати дійсні напрямки струмів. При визначенні сумарного струму в кожній вітці слід порівнювати напрямки часткових схем з напрямком струму у вітці вихідної схеми.

Струм будь-якої вітки можна подати у вигляді суми часткових струмів:

$$I_k = E_1 G_{k1} + E_2 G_{k2} + E_k G_{kk}, \quad (6.1)$$

де  $G_{kk} = \frac{I_k^k}{E_k}$  –вхідна провідність  $k$  –ї вітки;  $G_{k1} = \frac{I_k^1}{E_1}$  –взаємна провідність  $k$  –ї та 1-ї вітки;  $G_{k2} = \frac{I_k^2}{E_2}$  –взаємна провідність  $k$  –ї і 2-ї вітки.

Порядок розрахунку за методом накладання

1. Довільно задаємося напрямками струмів у вітках кола і позначаємо їх на вихідній схемі.
2. Розраховуємо часткові струми від дії кожної ЕРС чи кожного джерела струму окремо. При цьому треба закорочувати інші джерела напруги й розмикати джерела струму ( враховуємо також, що не треба закорочувати внутрішній опір джерела напруги, якщо останній заданий).
3. Алгебраїчно підсумовуємо часткові струми, орієнтуючись при цьому на обрані напрямки струмів у вихідній схемі.

Примітка: частковими струмами не можна користуватися при розрахунку потужностей:  $I_1^2 R_1 \neq I_1'^2 R_1 + I_1''^2 R_1 + I_1'''^2 R_1$ .

Метод еквівалентного генератора (метод активного двополюсника) найбільше доцільно використовувати для визначення струму в одній з віток складного електричного кола. Цей метод заснований на двох теоремах про активний двополюсник – Тевена і Нортон.

*Теорема Тевена* (послідовна схема заміщення): будь-який активний двополюсник можна замінити еквівалентним джерелом напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на затискачах двополюсника, а внутрішній опір – вхідному опору відповідного пасивного двополюсника.

*Теорема Нортон* (паралельна схема заміщення): будь-який активний двополюсник можна замінити паралельним зеднанням джерела струму й провідності. Величина струму джерела струму дорівнює струму короткого замикання, а внутрішня провідність – вхідній провідності відповідного пасивного двополюсника.

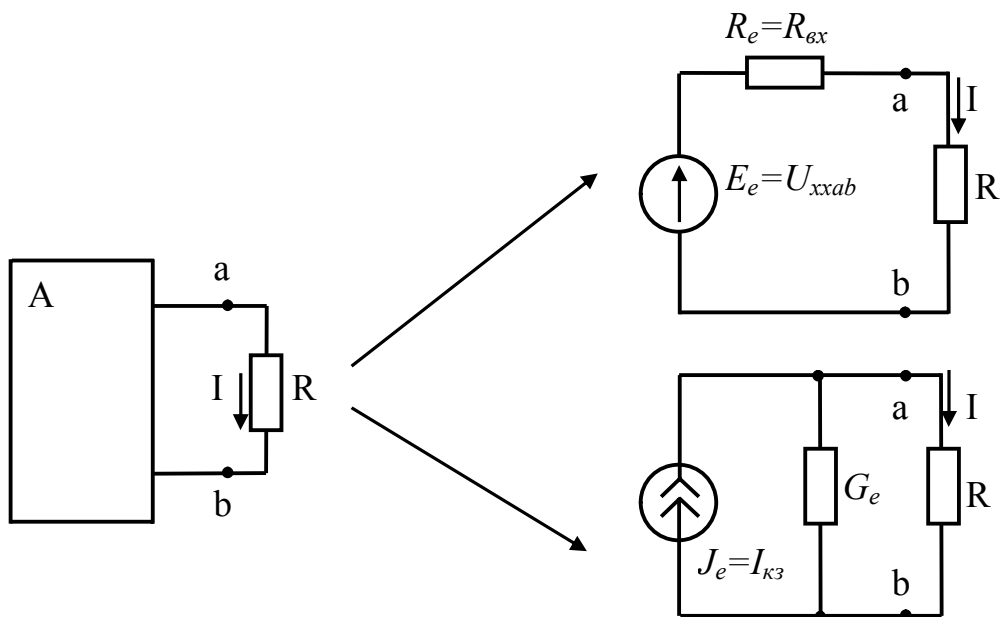


Рис.6.1

При розв'язанні задачі методом активного двополюсника рекомендується наступний алгоритм:

1. Виділити вітку, в якій визначають струм, і замінити частину схеми, що залишилася (активний двополюсник), послідовною або паралельною схемою заміщення (рис.6.1). Визначити параметри еквівалентної схеми заміщення:  $E_e$  або  $J_e$ ;  $R_e$  або  $G_e$ .

2. Для розрахунку  $R_e$  або  $G_e$  зобразити схему відповідного пасивного двополюсника. Для цього в схемі активного двополюсника джерела ЕРС закортити, а джерела струму відключити. Після цього, застосувавши еквівалентні перетворення в електричному колі, знайти вхідний опір (провідність) двополюсника.

Для розрахунку  $U_{abxx}$  або  $I_K$  необхідно зобразити схему активного двополюсника (рис.6.2) (при цьому розімкнути або закортити вітку з опором  $R$ ).

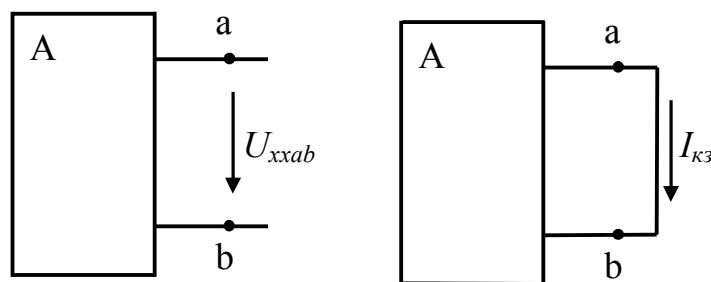


Рис.6.2

У цих схемах необхідно розрахувати струми у вітках кола будь-яким зручним методом, а потім знайти  $U_{abxx}$  з рівняння другого закону Кірхгофа або струм  $I_K$  у вітці, що короткозамкнена.

3. Обчислити струм  $I$  у виділеній вітці за законом Ома або за «золотим» правилом:

$$I = \frac{U_{xxab}}{R_{вх} + R}, \quad (6.2)$$

або

$$I = I_K \frac{R_{вх}}{R_{вх} + R} \quad (6.3)$$

### Задача 1. Визначення струмів розгалуженої схеми методом накладання.

Для розгалуженої схеми рис.6.3,а задано:  $E_1 = 45 \text{ В}$ ,  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 10 \text{ Ом}$ ,  $J = 6 \text{ А}$ . Визначити струми в схемі методом накладання.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу накладання і алгоритм розрахунку за ним;
- вміти використовувати закони Ома і Кірхгофа.

#### Вирішення

1. Вкажемо додатні напрямки струмів у вітках вихідної схеми. Зобразимо дві часткові схеми: з джерелом ЕРС (рис.6.3,б) і з джерелом струму (рис.6.3,в).

2. Вкажемо дійсні напрямки часткових струмів у схемах і визначимо їх. У схемі рис.6.3,б з другого закону Кірхгофа знаходимо:



$$I'_1 = I'_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{45}{15} = 3 \text{ A.}$$

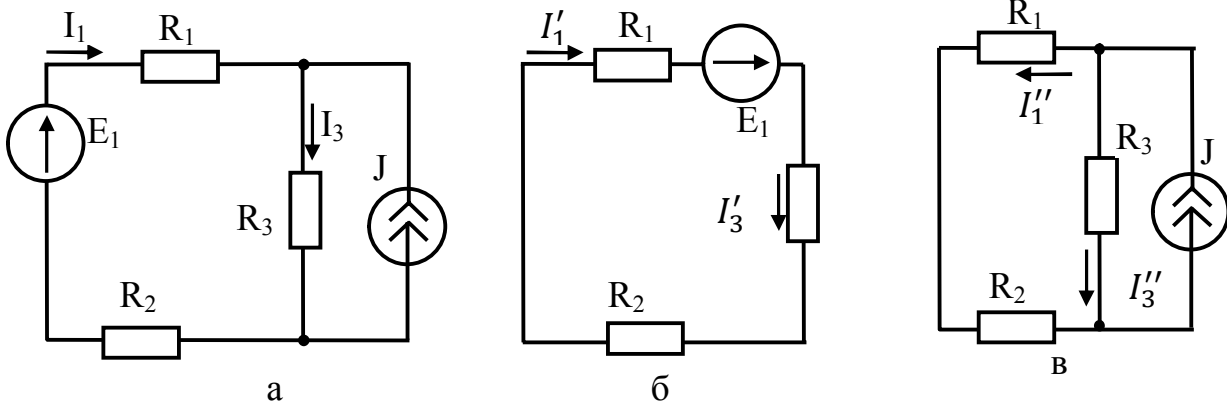


Рис.6.3

3. У схемі рис.6.3,в за «золотим» правилом:

$$I''_1 = J \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 6 \cdot \frac{10}{15} = 4 \text{ A.}$$

$$I''_3 = J - I''_1 = 6 - 4 = 2 \text{ A.}$$

4. Знайдемо струми у вихідній схемі. Порівнюючи напрямки струмів у кожній вітці вихідної схеми з напрямками часткових струмів, можна записати:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 3 - 4 = 1 \text{ A}; \quad I_3 = I'_3 + I''_3 = 3 + 2 = 5 \text{ A.}$$

### Задача 2. Визначення струмів розгалуженої схеми методом накладання.

У схемі рис.6.4,а задано:  $E_1 = 100 \text{ B}$ ,  $E_2 = 50 \text{ B}$ ,  $J_2 = 15 \text{ A}$ ,  $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках методом накладання.

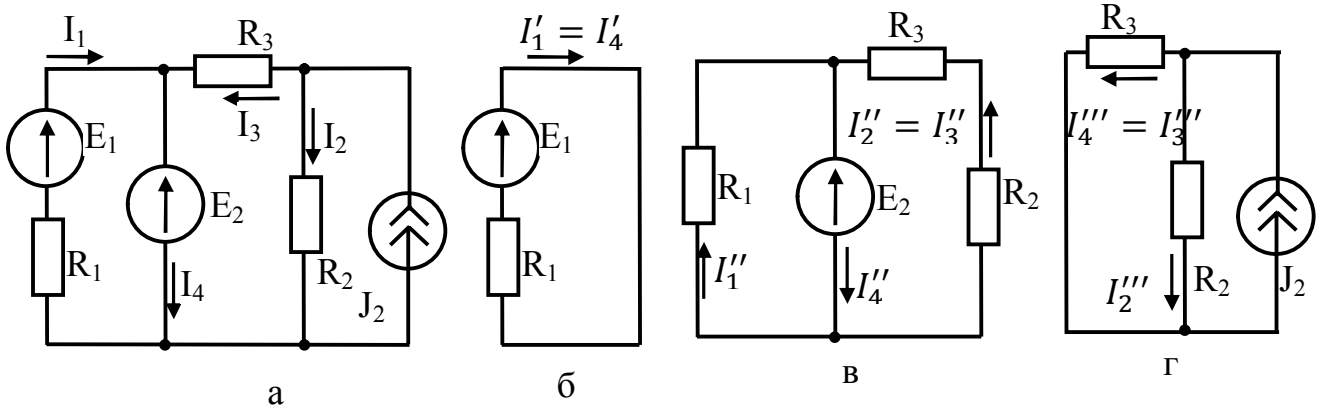


Рис.6.4

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу накладання і алгоритм розрахунку за ним;
- вміти використовувати закони Ома і Кірхгофа.

Вирішення.

1. Складемо три часткові схеми (рис.6.4,б,в,г).

2. У схемі рис.6.4,б опори  $R_2$  і  $R_3$  не зображуємо, тому що вони відокремлені від джерела  $E_1$  перемичкою і струму в них не буде, тоді:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}; \quad I'_4 = I'_1 = 10 \text{ A}; \quad I'_3 = I'_2 = 0 \text{ A.}$$

У схемі рис.6.4,в:

$$I_1'' = \frac{E_2}{R_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}; \quad I_2'' = I_3'' = \frac{E_2}{R_2+R_3} = \frac{50}{15} = 3,33 \text{ A};$$

$$I_4'' = I_1'' + I_2'' = 5 + 3,33 = 8,33 \text{ A}.$$

У схемі рис.6.4,г:

$$I_1''' = 0 \text{ A}; \quad I_2''' = J_2 \frac{R_3}{R_2+R_3} = 15 \cdot \frac{5}{15} = 5 \text{ A};$$

$$I_3''' = I_4''' = J_2 \frac{R_2}{R_2+R_3} = 15 \cdot \frac{10}{15} = 10 \text{ A}.$$

3. Знайдемо струми вихідної схеми:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 10 - 5 = 5 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2'' + I_2''' = 3,33 + 5 = 8,33 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3''' - I_3'' = 10 - 3,33 = 6,67 \text{ A};$$

$$I_4 = I_4' - I_4'' + I_4''' = 10 - 8,33 + 10 = 11,67 \text{ A}.$$

### Задача 3. Визначення невідомого струму вітки розгалуженої схеми методом еквівалентного генератора.

Електрична схема рис.6.5,а має наступні параметри елементів:  $E = 240 \text{ В}$ ,  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_0 = 50 \text{ Ом}$ . Визначити  $I_0$  струм в діагоналі моста.

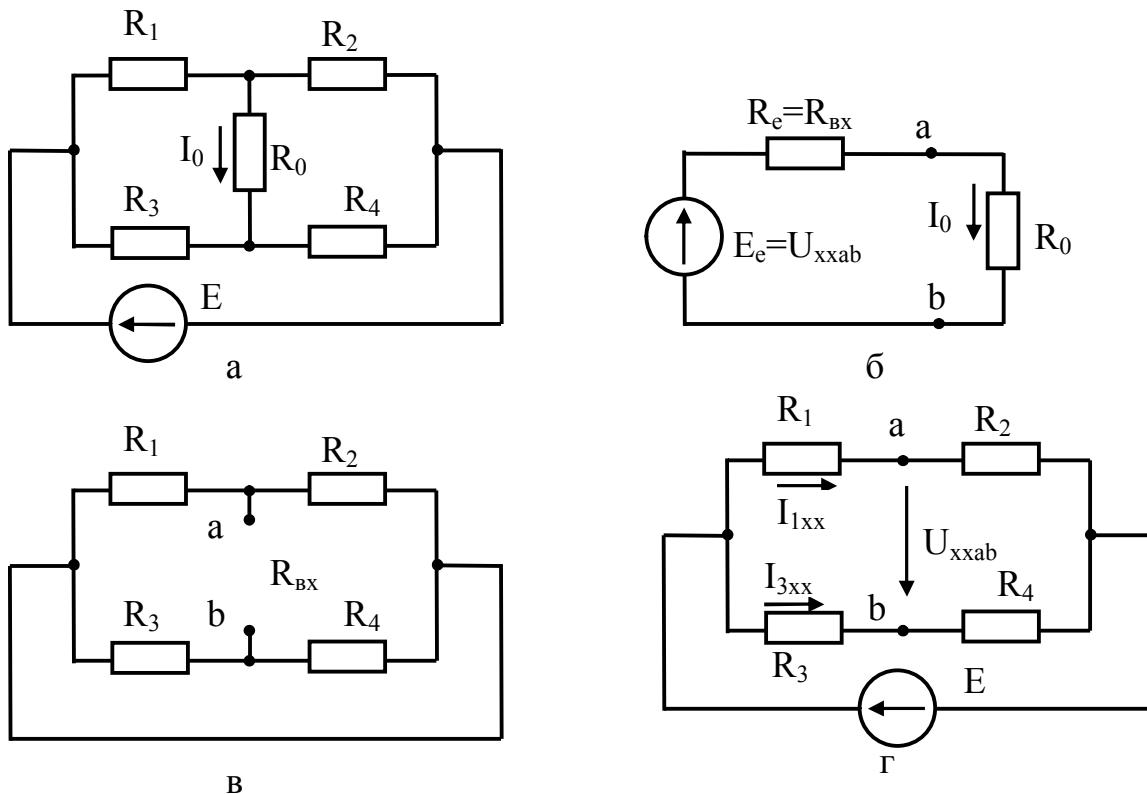


Рис.6.5

Для вирішення задачі необхідно:

– знати основи методу еквівалентного генератора і алгоритм розрахунку за ним;

– вміти використовувати закони Ома і Кірхгофа.

### Вирішення.

Для вирішення задачі доцільно використовувати метод еквівалентного генератора, тому що для безпосереднього розрахунку вихідної схеми необхідно або розв'язувати систему рівнянь, або перетворити трикутник опорів (зірку) в еквівалентну зірку (трикутник).

1. Відокремимо вітку з  $R_0$  і замінемо частину схеми, що залишилися (активний двополіусник), послідовною схемою заміщення (рис.6.5,б). У схемі рис.6.5,б струм  $I_0 = \frac{U_{xx}}{R_{вх}+R_0}$ .

2. Знайдемо параметри  $U_{xx}$  та  $R_{вх}$ . Зобразимо схему для визначення  $R_{вх}$  (рис.6.5,в). Джерело ЕРС закортимо. У схемі рис.6.5,в опори  $R_1$  та  $R_2$ , а також  $R_3$  та  $R_4$  включені паралельно, тому вхідний опір:

$$R_{вх} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{20 \cdot 40}{20 + 40} + \frac{30 \cdot 10}{30 + 10} = \frac{125}{6} = 20,833 \text{ Ом.}$$

Зобразимо схему для розрахунку  $U_{xx}$  (рис.6.5,г). Для цього з вихідної схеми відключимо вітку з  $R_0$ . Струми в схемі рис.6.5,г знайдемо за законом Ома:

$$I_{1x} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{240}{20 + 40} = 4 \text{ А}; \quad I_{3x} = \frac{E}{R_3 + R_4} = \frac{240}{30 + 10} = 6 \text{ А};$$

Напругу  $U_{xx}$  знайдемо з другого закону Кірхгофа:

$$R_1 I_{1x} + U_{abxx} - R_3 I_{3x} = 0$$

$$U_{abxx} = R_3 I_{3x} - R_1 I_{1x} = 30 \cdot 6 - 20 \cdot 4 = 100 \text{ В.}$$

3. Струм у діагоналі моста

$$I_0 = \frac{U_{abxx}}{R_{вх} + R_0} = \frac{100}{20,833 + 50} = 1,41 \text{ А.}$$

### Задача 4. Визначення невідомого опору вітки розгалуженої схеми за допомогою методу еквівалентного генератора.

У схемі рис.6.6:  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 5 \text{ Ом}$ . Відомі покази приладів для двох положень ключа: 1-е положення  $U_{V1} = 10 \text{ В}$ ; 2-е положення  $U_{V2} = 5 \text{ В}$ ,  $I_A = 1 \text{ А}$ . Визначити опір  $R_4$  (прилади вважати ідеальними).

Для вирішення задачі необхідно:

– знати основи методів еквівалентного генератора і накладання та алгоритм розрахунку за ними;

– вміти користуватися законами Ома та Кірхгофа.

### Вирішення.

1. Задачу легко розв'язати, використовуючи метод активного двополіусника. Опір  $R_4$  можна знайти з виразу вхідного опору стосовно вітки з опором  $R_5$ .

2. Підставимо числові значення у вираз для струму  $I_5$ , одержимо:

$$1 = \frac{10}{R_{вх} + 5}, \text{ звідки } R_{вх} = 5 \text{ Ом.}$$

З іншого боку  $R_{вх}$  можна знайти за схемою рис.6.6, якщо  $E_1 = E_2 = 0$ ;

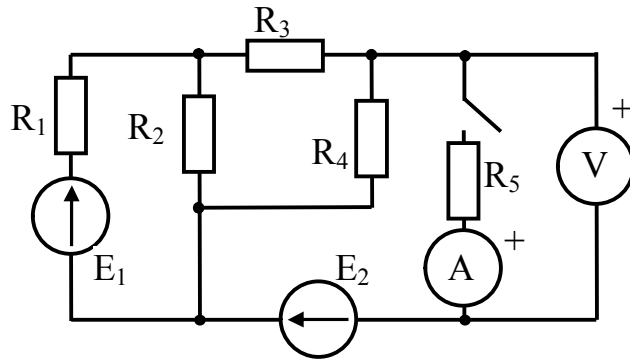


Рис.6.6

$$R_{\text{вх}} = \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right) R_4}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4} = \frac{\left(\frac{10 \cdot 10}{10 + 10} + 5\right) R_4}{\frac{10 \cdot 10}{10 + 10} + 5 + R_4} = \frac{10 R_4}{10 + R_4}.$$

3. Прирівнюючи отриманий вираз до раніше обчисленого значення  $R_{\text{вх}}$ , одержимо:

$$\frac{10 R_4}{10 + R_4} = 5, \text{ звідки знайдемо } R_4 = 10 \text{ Ом}.$$

Вхідний опір  $R_{\text{вх}}$  визначимо, використовуючи теорему про активний двополносьник для струму  $I_5$  у другому положенні ключа,

$$I_5 = I_A = \frac{U_{xx}}{R_{\text{вх}} + R_5},$$

де  $U_{xx} = U_{V1} = 10 \text{ В}$ , а опір  $R_5$  знайдемо за законом Ома:

$$R_5 = \frac{U_{V2}}{I_{A2}} = 5 \text{ Ом}.$$

## ТЕМА 7. КОЛА ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

### 7.1. Загальні відомості

Гармонічний режим – це основний режим роботи електроенергетичних мереж і систем.

Гармонічним називається струм чи напруга, закон зміни якого описується функцією синуса чи косинуса:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (7.1)$$

Гармонічний процес характеризується трьома параметрами:

- амплітудою ( $I_m, U_m, E_m, J_m$ ), що завжди є додатною величиною;
- кутовою (круговою) частотою  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , де  $T$  – період гармонічного коливання;
- початковою фазою  $\psi$ , що вимірюється в радіанах.

Величина  $f = \frac{1}{T}$  називається циклічною частотою,  $\omega = 2\pi f$ ;

Величина  $(\omega t + \psi)$  називається повною фазою.

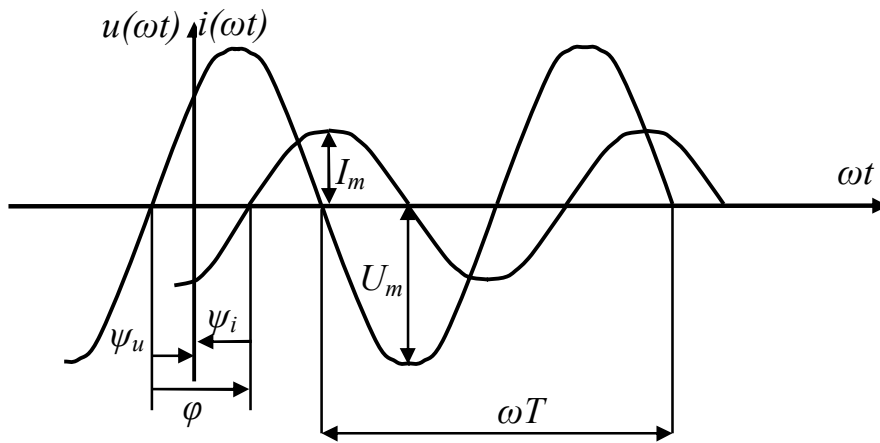


Рис.7.1

У даній темі вивчаються процеси в лінійних електричних колах із гармонічними джерелами однакової частоти. У таких колах усі струми й напруги змінюються за гармонічним законом з тією ж частотою, що і джерела. Тому струми і напруги в колі відрізняються лише амплітудами ( $I_m, U_m$ ), і початковими фазами ( $\psi_i, \psi_u$ ). На рис.7.1 зображено часові графіки гармонічного струму і напруги в колі.

Різниця початкових фаз напруги і струму має назву кута зсуву фаз

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

При розрахунках кіл змінного струму використовують поняття діючого (ефективного) значення струму, напруги, електрорушійної сили (ЕРС). Це середньоквадратична величина за період. Наприклад, для гармонічного струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (7.2)$$

Коефіцієнти, що характеризують синусоїдну функцію:

- коефіцієнт амплітуди  $k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}$  ;
- коефіцієнт форми  $k_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{2/\pi \cdot I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$  .

Для миттєвих значень закони Кірхгофа формулюються так:

- алгебраїчна сума миттєвих струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю ( $\sum i_k = 0$ );
- алгебраїчна сума миттєвих ЕРС у замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих напруг на всіх його елементах ( $\sum e_k = \sum u_k$ ) .

Правило знаків і запис рівнянь цілком аналогічні колам постійного струму. За додатній напрямком струму (напруги) приймають напрямком додатної півхвилі. Наприклад, для послідовного з'єднання активного опора ( $r$ ), індуктивності ( $L$ ), ємності ( $C$ ), яке показано на рис.7.2, другий закон Кірхгофа для миттєвих значень має вигляд

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt . \quad (7.3)$$

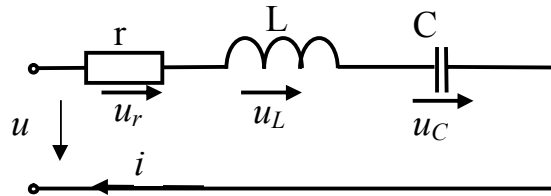


Рис.2.2

Якщо у цьому колі протікає струм  $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , то напруга на резистивному елементі збігається за фазою зі струмом:

$$u_r = ri = rI_m \sin(\omega t + \psi_i) = U_{rm} \sin(\omega t + \psi_{ur}), \quad (7.4)$$

де  $U_{rm} = rI_m$  – амплітуда напруги на резистивному елементі;  $\psi_{ur} = \psi_i$  – початкова фаза напруги на резистивному елементі, що збігається з початковою фазою струму.

Напруга на індуктивному елементі випереджає струм за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ ;

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_{uL}), \quad (7.5)$$

де  $U_{Lm} = \omega LI_m = x_L I_m$  – амплітуда напруги на індуктивному елементі;  $x_L = \omega L$  – індуктивний опір;  $\psi_{uL} = \psi_i + \frac{\pi}{2}$  – початкова фаза напруги на індуктивному елементі.

Напруга на ємнісному елементі відстає від струму на кут  $\frac{\pi}{2}$ ;

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_{uC}), \quad (7.6)$$

де  $U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} I_m = x_C I_m$  – амплітуда напруги на ємнісному елементі;  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  – ємнісний опір;  $\psi_{uC} = \psi_i - \frac{\pi}{2}$  – початкова фаза напруги на ємнісному елементі.

Таким чином, математична модель даного кола описується тригонометричним рівнянням. Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{z}, \quad \psi_i = \psi_u - \varphi, \quad (7.7)$$

де  $\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$  – кут зсуву фаз між напругою і струмом в колі;

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + x^2} \text{ – повний опір кола;}$$

$r$  – активний опір;  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C$  – реактивний опір.

Активний, реактивний і повний опори утворюють прямокутний трикутник опорів (рис.7.3).

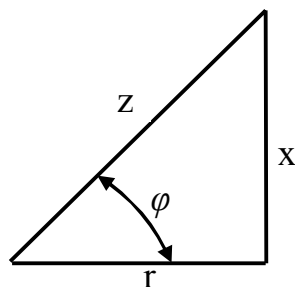


Рис.7.3

З трикутника випливає:  $r = z \cos \varphi$ ,  $x = z \sin \varphi$ ,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{r}$ .

Реактивний опір  $x$  – алгебраїчна величина. Якщо  $x_L > x_C$ , то  $x > 0$ ,  $\varphi > 0$  і коло має індуктивний характер (напруга випереджає за фазою струм). Якщо  $x_L < x_C$ , то  $x < 0$ ,  $\varphi < 0$  і коло має ємнісний характер (струм випереджає за фазою напругу).

Величина, зворотна повному опору, називається повною провідністю кола

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Для паралельного з'єднання  $r, L$  і  $C$  (паралельний контур) провідності визначають таким чином:  $g = \frac{1}{r}$  – активна провідність;  $b_L = \frac{1}{\omega L}$  – індуктивна провідність;  $b_C = \omega C$  – ємнісна провідність;  $b = b_L - b_C$  – реактивна провідність. Повна провідність  $y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = \sqrt{g^2 + b^2}$ .

### Задача 1. Розрахунок миттєвої напруги на ємності.

У момент  $t = 0$  ємність  $C$  підключається до напруги  $u(t) = 180 \sin(314t - 30^\circ)$ . Визначити, до якої напруги зарядиться ємність через час  $t_1 = 0,05$  с,  $t_2 = 0,1$  с.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвої напруги;
- вміти визначати повну фазу синусоїдної напруги в електричних градусах.

Вирішення.

1. Визначимо напругу на ємності в момент часу  $t_1$ ;

$$u(t_1) = 180 \sin(314 \cdot 0,05 - 30^\circ) = 180 \sin(15,7 - 30^\circ) \text{ В}.$$

2. Представимо повну фазу синусоїдальної величини в електричних градусах

$$\omega t_1 = \frac{15,7 \cdot 360^\circ}{6,28} = 900^\circ.$$

3. З отриманого результату віднімемо  $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$ , тоді  $\omega t_1 = 180^\circ$  і

$$u(t_1) = 180 \sin(180^\circ - 30^\circ) = 180 \sin(150^\circ) = 90 \text{ В}.$$

4. Визначимо напругу на ємності в момент часу  $t_2$ :

$$u(t_2) = 180 \sin(314 \cdot 0,1 - 30^\circ) = 180 \sin(31,4 - 30^\circ) = 180 \cdot \sin(0 - 30^\circ) = -90 \text{ В}.$$

### Задача 2. Розрахунок нерозгаженого кола синусоїдного струму тригонометричним методом.

Електрична схема, зображена на рис.7.4,а, живиться від джерела синусоїдної напруги:  $u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 90^\circ)$  В. Параметри кола:  $r = 20$  Ом,  $L = 200$  мГн,  $C = 22$  мкФ, кутова частота  $\omega = 314$  рад/с.

Визначити:

- діючі значення струму і напруг на елементах;
- кут зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола;
- миттєві значення струму і напруг.

Переконатися в тому, що другий закон Кірхгофа не виконується для діючих значень напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих, амплітудних, діючих напруги і струму;
- вміти визначати напругу і струм нерозгалуженого кола тригонометричним методом.

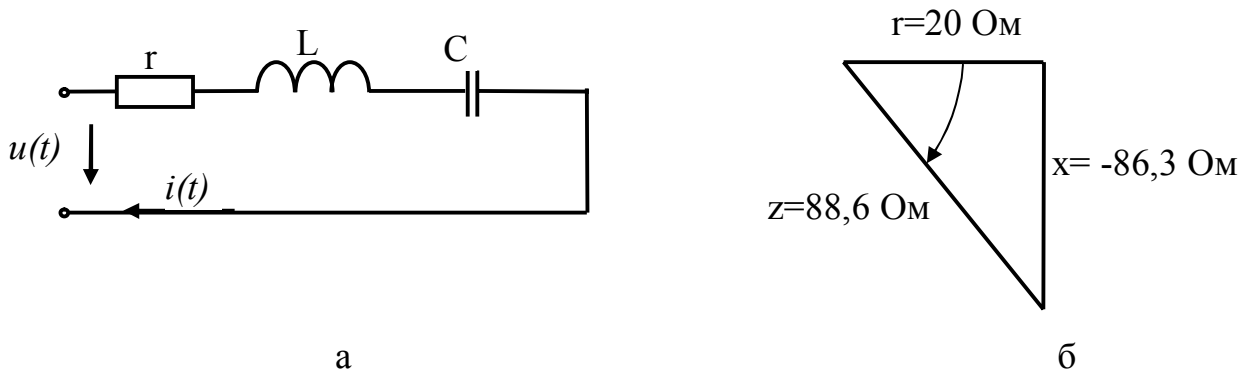


Рис.7.4

Вирішення.

1. У колі струм і напруги на елементах змінюються за гармонічним законом з кутовою частотою  $\omega = 314$  рад/с :

$$i(t) = I_m \sin(314t + \psi_i);$$

$$u_r(t) = U_{rm} \sin(314t + \psi_{ur}); \quad u_L(t) = U_{Lm} \sin(314t + \psi_{uL});$$

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(314t + \psi_{uC}).$$

Необхідно визначити амплітуди і початкові фази величин.

2. Знайдемо індуктивний і ємнісний опори:

$$x_L = \omega L = 314 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 61,4 \text{ Ом};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 22 \cdot 10^{-6}} = 147,7 \text{ Ом}.$$

3. Реактивний опір кола  $x = x_L - x_C = 61,4 - 147,7 = -86,3 \text{ Ом}.$

4. Повний опір кола  $z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{20^2 + 86,3^2} = 88,6 \text{ Ом}.$

Повний, активний і реактивний опори утворюють трикутник опорів (рис.7.4,б).

5. Кут зсуву фаз між струмом і напругою

$$\varphi = \arctg \frac{x}{r} = \arctg \frac{-86,3}{20} = -77^\circ.$$

6. За законом Ома амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{100 \cdot \sqrt{2}}{88,6} = 1,13 \cdot \sqrt{2} \text{ А}.$$

7. Початкова фаза струму  $\psi_i = \psi_u - \varphi = -90^\circ - (-77^\circ) = -13^\circ.$

8. Миттєвий струм  $i(t) = 1,13 \cdot \sqrt{2} \sin(314t - 13^\circ) \text{ А}.$

9. Амплітуди напруг на елементах кола:

$$U_{rm} = r I_m = 20 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 22,6 \cdot \sqrt{2} \text{ В};$$

$$U_{Lm} = x_L I_m = 61,4 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 69,38 \cdot \sqrt{2} \text{ В};$$

$$U_{Cm} = x_C I_m = 147,7 \cdot 1,13 \cdot \sqrt{2} = 166,9 \cdot \sqrt{2} \text{ В}.$$

10. Початкові фази напруг на елементах:

$$\psi_{ur} = \psi_i = -13^\circ; \quad \psi_{uL} = \psi_i + \frac{\pi}{2} = -13^\circ + 90^\circ = 77^\circ;$$



$$\psi_{uc} = \psi_i - \frac{\pi}{2} = -13^\circ - 90^\circ = -103^\circ .$$

11. Миттєві значення напруг на елементах ,В:

$$u_r(t) = 22,6 \cdot \sqrt{2} \sin(314t - 13^\circ);$$

$$u_L(t) = 69,38 \cdot \sqrt{2} \sin(314t + 77^\circ);$$

$$u_C(t) = 166,9 \cdot \sqrt{2} \sin(314t - 103^\circ).$$

12. Діючі значення величин:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1,13 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,13 \text{ А}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В}; \quad U_r = 22,6 \text{ В}; \quad U_L = 69,38 \text{ В};$$

$$U_C = 166,9 \text{ В}.$$

13. Для миттєвих значень другий закон Кірхгофа має вигляд

$$u = u_r + u_L + u_C.$$

14. Для діючих значень другий закон Кірхгофа не виконується:

$$100 \neq 22,6 + 69,38 + 166,9.$$

### Задача 3. Розрахунок розгалуженого кола синусоїдного струму тригонометричним методом

У схемі рис. 7.5, а дано:  $i(t) = 5 \cdot \sqrt{2} \sin 314t \text{ А}$ .  $r = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,064 \text{ Гн}$ ,  $C = 53 \text{ мкФ}$ .

Визначити:

- діюче значення напруги на вході кола і струмів у паралельних вітках;
- миттєві значення струмів і напруги.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих, амплітудних, діючих напруги і струму;
- вміти визначати напругу і струм розгалуженого кола тригонометричним методом.

Переконатися в тому, що перший закон Кірхгофа не виконується для діючих значень струмів.

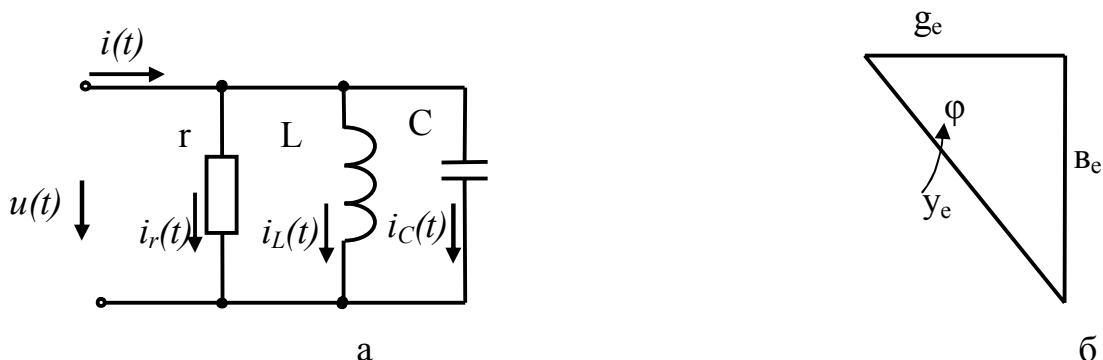


Рис.7.5

Вирішення.

1. Визначимо провідності віток кола:  $g = \frac{1}{r} = \frac{1}{40} = 0,025 \text{ См}$ ,

$$b_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{314 \cdot 0,064} = 0,05 \text{ См}, \quad b_C = \omega C = 314 \cdot 53 \cdot 10^{-6} = 0,0167 \text{ См}.$$

2. Визначимо вхідні провідності кола:

активна провідність кола  $g_e = g = 0,025$  См;

реактивна провідність кола  $b_e = b_L - b_C = 0,05 - 0,0167 = 0,0333$  См ;

повна провідність кола  $y_e = \sqrt{g_e^2 + b_e^2} = \sqrt{0,025^2 + 0,0333^2} = 0,0416$  См.

Повна, активна і реактивна провідності утворюють трикутник провідностей (рис.7.5,б).

3. Амплітуду вхідної напруги знайдемо за законом Ома:

$$U_m = \frac{I_m}{y_e} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{0,0416} = 120 \cdot \sqrt{2} \text{ В/}$$

4. З трикутника провідностей знайдемо кут зсуву фаз між струмом і напругою на вході кола:

$$\varphi = \arctg \frac{b_e}{g_e} = \arctg \frac{0,0333}{0,025} = 53^\circ.$$

5. Початкова фаза вхідної напруги  $\psi_u = \varphi + \psi_i = 53^\circ$ .

6. Визначимо амплітуди струмів у вітках кола, А:

$$I_{mr} = U_m g = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,025 = 3 \cdot \sqrt{2};$$

$$I_{mL} = U_m b_L = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,05 = 6 \cdot \sqrt{2};$$

$$I_{mC} = U_m b_C = 120 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,0167 = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

7. Початкові фази струмів:

$$\psi_{ir} = \psi_u = 53^\circ, \quad \psi_{iL} = \psi_u - \frac{\pi}{2} = 53^\circ - 90^\circ = -37^\circ,$$

$$\psi_{iC} = \psi_u + \frac{\pi}{2} = 53^\circ + 90^\circ = 143^\circ.$$

8. Миттєві значення напруги і струмів:

$$u(t) = 120 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ В};$$

$$i_r(t) = 3 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) \text{ А}$$

$$i_L(t) = 6 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 37^\circ) \text{ А};$$

$$i_C(t) = 2 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 143^\circ) \text{ А}.$$

9. Діючі значення напруги і струмів:

$$U = 120 \text{ В}, \quad I = 5 \text{ А}, \quad I_r = 3 \text{ А}, \quad I_L = 6 \text{ А}, \quad I_C = 2 \text{ А}.$$

$I \neq I_r + I_L + I_C$  – перший закон Кірхгофа для діючих значень струмів не виконується.

## ТЕМА 8. ЗОБРАЖЕННЯ СИНУСОЇДНИХ ВЕЛИЧИН КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ФОРМИ ЗАПISУ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА, ПЕРЕХІД ВІД МИТТЄВИХ ЗНАЧЕНЬ ДО КОМПЛЕКСНИХ І НАВПАКИ.

### 8.1 Загальні відомості

Комплексна площина – це система прямокутних координат (вісь дійсних чисел і вісь уявних чисел).

Розрахунок електричних кіл суттєво полегшується, якщо зображувати синусоїдні величини векторами, або комплексними числами.

Відповідно до формули Ейлера комплексне число  $e^{j\alpha}$  дорівнює:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$

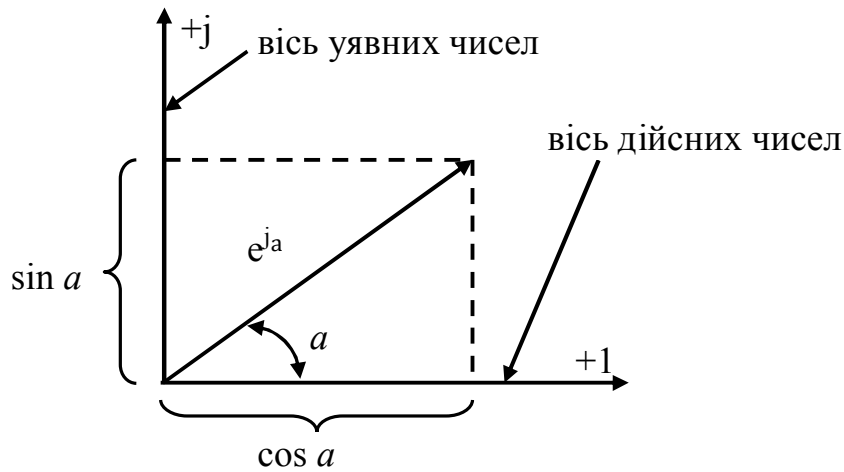


Рис.8.1

На комплексній площині комплексне число  $e^{j\alpha}$  зображується вектором, що має одиничну довжину і складає з віссю дійсних чисел кут  $\alpha$  (рис.8.1). Проекція  $e^{j\alpha}$  на вісь дійсних чисел –  $\cos \alpha$ , а на вісь уявних чисел –  $\sin \alpha$ ;  $j = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Якщо замість числа  $e^{j\alpha}$  розглянути число  $I_m e^{j\alpha}$ , то відповідно до формули Ейлера  $I_m e^{j\alpha} = I_m \cos \alpha + j I_m \sin \alpha$ , і на комплексній площині воно зображується вектором, що має довжину  $I_m$  і також складає з віссю дійсних чисел кут  $\alpha$ . Кут може бути будь-яким. Припустимо, що  $\alpha = \omega t + \varphi$ , тоді

$$I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j I_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де  $I_m \cos(\omega t + \varphi)$  – дійсна частина,  $I_m \sin(\omega t + \varphi)$  – коефіцієнт при уявній одиниці  $j$ .

Таким чином, синусоїдний струм  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$  можна уявити як проекцію вектора  $I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ , що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , на вісь уявних чисел. Якщо синусоїдна функція повністю характеризується амплітудою і початковою фазою при відомій частоті, то початкове положення вектора  $I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$ , повністю визначає синусоїдну функцію  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ , а комплексне число  $\dot{I}_m = i_m e^{j\varphi}$  називається комплексною амплітудою струму ( $e^{j\omega t}$  – оператор обертання). Векторне зображення синусоїдних величин для нульового моменту часу дає наочну картину взаємного розташування комплексних амплітуд синусоїдних функцій і дозволяє легко проводити простіші операції.

Примітка: на комплексній площині додатні кути відкладаються проти годинникової стрілки від осі дійсних чисел, від'ємні – за годинниковою стрілкою від осі дійсних чисел.

Існують три форми запису комплексних чисел:

– показова  $\dot{I}_m \dot{I}_m = 5e^{j30^\circ}; = 5e^{j53,13^\circ};$

– алгебраїчна  $\dot{I}_m = 3 + j4$ , де 3 – дійсна частина,  $j4$  – уявна частина;

– тригонометрична  $\dot{I}_m = 5 \cos 53,13^\circ + j5 \sin 53,13^\circ$ , як перехід від

показової форми до алгебраїчної.

Дії над комплексними числами:

– множення двох комплексних чисел краще робити в показовій формі, наприклад:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{z} = 5e^{j30^\circ} \cdot 15e^{-j40^\circ} = 75e^{-j10^\circ}, \text{ В}$$

– ділення роблять також у показовій формі, наприклад:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{z}} = \frac{75e^{-j10^\circ}}{15e^{-j40^\circ}} = 5e^{j30^\circ}, \text{ А.}$$

– додавання і віднімання зручніше робити в алгебраїчній формі, наприклад:

$$\dot{I}_{m1} = 10e^{-j60^\circ} = 10 \cos(-60^\circ) + j10 \sin(-60^\circ) = 5 - j8,66;$$

$$\dot{I}_{m2} = 5e^{j30^\circ} = 5 \cos(30^\circ) + j5 \sin(30^\circ) = 4,33 + j2,5;$$

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = 5 - j8,66 + 4,33 + j2,5 = 9,33 - j6,16.$$

**Звернути увагу!** Перехід від алгебраїчної до показової форми має деякі особливості. Так, якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться в першій або в четвертій чвертях комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\dot{I}_m = 4,33 + j2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} e^{j(\arctg \frac{2,55}{4,33})} = 5e^{j30^\circ},$$

$$\dot{I}_m = 4,33 - j2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} e^{j(\arctg \frac{-2,55}{4,33})} = 5e^{-j30^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у другій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\dot{I}_m = -4,33 + j2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} e^{j(180 - \arctg \frac{2,55}{4,33})} = 5e^{j150^\circ}.$$

Якщо вектор, що зображує комплексне число, знаходиться у третій чверті комплексної площини, перехід роблять наступним чином:

$$\dot{I}_m = -4,33 - j2,55 = \sqrt{4,33^2 + 2,55^2} e^{-j(180 - \arctg \frac{2,55}{4,33})} = 5e^{-j150^\circ}.$$

### Задача 1. Визначення миттєвого значення струму за алгебраїчною формою запису.

Комплекс діючого значення струму  $\dot{I} = -2,5 + j4,3$  А. Визначити миттєве значення струму ( $i$ ), якщо  $\omega = 314$  рад/с.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;
- вміти здійснювати перехід від алгебраїчної форми запису комплексного числа до показової.

Вирішення.

1. Перейдемо до показової форми запису комплексного струму

$\dot{I} = -2,5 + j4,3 = 5e^{j120^\circ}$ , де  $I = \sqrt{2,5^2 + 4,3^2} = 5$  – модуль комплексного числа;  $\psi_i = 180^\circ - \arctg \frac{4,3}{2,5} = 120^\circ$  - аргумент комплексного числа.

2. Комплексна амплітуда  $\dot{I}_m = 5\sqrt{2}e^{j120^\circ}$ .

3. Миттєве значення струму

$$i(t) = 5 \cdot \sqrt{2} \sin(314t + 120^\circ) \text{ А.}$$

## Задача 2. Визначення амплітудного значення і початкової фази струму за його показовою формою.

Задано комплекс діючого значення струму

$$\dot{i} = \left( 2,43e^{j53^\circ} - 0,88e^{-j37^\circ} + 1,03e^{j\frac{3}{4}\pi} - 0,52e^{-j236^\circ} \right) \text{ A.}$$

Визначити амплітуду і початкову фазу струму.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;
- вміти здійснювати перехід від показової форми запису комплексного числа до алгебраїчної і зворотно.

Вирішення.

1. Щоб провести додавання комплексних чисел, необхідно перейти до алгебраїчної форми їх запису:

$$\begin{aligned} \dot{i} &= 2,43 \cos 53^\circ + j2,43 \sin 53^\circ - 0,88 \cos(-37^\circ) - j0,88 \sin(-37^\circ) + \\ &+ 1,03 \cos\left(\frac{3}{4} \cdot 180^\circ\right) + j1,03 \sin\left(\frac{3}{4} \cdot 180^\circ\right) - 0,52 \cos(-236^\circ) - \\ &- 0,52 \sin(-236^\circ) = 1,46 + j1,94 - 0,71 + j0,53 - 0,73 + j0,73 + \\ &+ 0,29 - j0,43 = 0,31 + j2,77 = 2,79e^{j83,6^\circ} \text{ A/} \end{aligned}$$

$$2. I_m = \sqrt{2} I = \sqrt{2} 2,79 = 3,93 \text{ A}; \quad \psi_i = 83,6^\circ.$$

## Задача 3. Визначення провідностей з комплексних опорів.

Комплексні опори задані виразами:  $\underline{z}_1 = (3 + j5) \text{ Ом}$ ,  $\underline{z}_2 = (5 + j3) \text{ Ом}$ ,  $\underline{z}_3 = (2,4 - j8,2) \text{ Ом}$ ,  $\underline{z}_4 = 2,8 \text{ кОм}$ ,  $\underline{z}_5 = 25e^{j90^\circ} \text{ Ом}$ .

Визначити активну, реактивну і повну провідності для кожного з опорів.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні форми запису комплексного числа;
- вміти здійснювати перехід від алгебраїчної форми запису комплексного числа до показової і зворотно.

Вирішення.

1. Визначимо комплексну провідність:  $\underline{y} = \frac{1}{\underline{z}} = g - j\text{в} = ye^{-j\varphi}$ .

$$\underline{y}_1 = \frac{1}{\underline{z}_1} = \frac{1 \cdot (3 - j5)}{(3 + j5) \cdot (3 - j5)} = \frac{3 - j5}{34} = 0,0882 - j0,147 = 0,172e^{-j59^\circ} \text{ См.}$$

Звідки  $g_1 = 0,0882 \text{ См}$ ,  $\text{в}_1 = 0,147 \text{ См}$ ,  $y_1 = 0,172 \text{ См}$ .

$$2. \quad \underline{y}_2 = \frac{1}{\underline{z}_2} = \frac{1 \cdot (5 - j3)}{(5 + j3) \cdot (5 - j3)} = \frac{5 - j3}{34} = 0,147 - j0,0882 = 0,172e^{-j31^\circ} \text{ См.}$$

Звідки  $g_2 = 0,147 \text{ См}$ ,  $\text{в}_2 = 0,0882 \text{ См}$ ,  $y_2 = 0,172 \text{ См}$ .

$$3. \quad \underline{y}_3 = \frac{1}{\underline{z}_3} = \frac{1}{(2,4 - j8,2)} = \frac{1}{8,54e^{-j74^\circ}} = 0,117e^{j74^\circ} = (0,0322 + j0,112) \text{ См.}$$

Звідки  $g_3 = 0,0322 \text{ См}$ ,  $\text{в}_3 = 0,112 \text{ См}$ ,  $y_3 = 0,117 \text{ См}$ .

$$4. \quad \underline{y}_4 = \frac{1}{\underline{z}_4} = \frac{1}{2,8 \cdot 10^3 e^{j0^\circ}} = 0,357 \cdot 10^{-3} e^{j0^\circ} = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ См.}$$

Звідки  $g_4 = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ См}$ ,  $\text{в}_4 = 0 \text{ См}$ ,  $y_4 = 0,357 \cdot 10^{-3} \text{ См}$ .

$$5. \quad \underline{y}_5 = \frac{1}{\underline{z}_5} = \frac{1}{25e^{j90^\circ}} = 0,04e^{-j90^\circ} = -j0,04 \text{ См.}$$

Звідки  $g_5 = 0 \text{ См}$ ,  $\text{в}_5 = 0,04 \text{ См}$ ,  $y_5 = 0,04 \text{ См}$ .

**ТЕМА 9. РОЗРАХУНОК НЕРОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ КОМПЛЕКСНИМ (СИМВОЛІЧНИМ) МЕТОДОМ. БАЛАНС ПОТУЖНОСТЕЙ У КОЛАХ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ.**

**9.1. Загальні відомості**

Суть комплексного методу полягає в тому, що роблять перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь, складених для миттєвих значень струмів і напруг, до системи алгебраїчних рівнянь, що складені відносно комплексних струмів, напруг і ЕРС. Синусоїдна величина зображується комплексним числом (символом), що заміщує її, диференціювання замінюється множенням на  $j\omega$ , а інтегрування – діленням на  $j\omega$ .

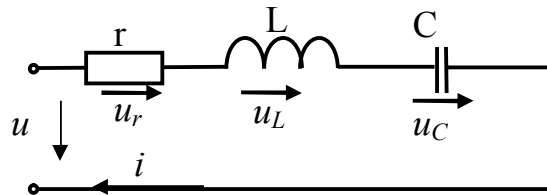


Рис.9.1

Розглянемо просте електричне коло (рис.9.1), до якого прикладена синусоїдна напруга  $u(t) = U_m \sin(\omega t)$  і в якому тече синусоїдний струм  $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ . Інтегрально-диференціальне рівняння, що характеризує стан кола (другий закон Кірхгофа):

$$u = u_r + u_L + u_C = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t idt . \quad (9.1)$$

Алгебраїчне рівняння, складене відносно комплексів струму і напруг, має вигляд

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_{mr} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} \quad (9.2)$$

– другий закон Кірхгофа в комплексній формі.

Застосуємо позначення:

$$x_L = \omega L; \quad x_C = \frac{1}{\omega C}; \quad x = x_L - x_C; \quad z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad (9.3)$$

– відповідно індуктивний, ємнісний, реактивний опори, модуль повного опора.

Тоді рівняння (4.2) набуває вигляду

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \left( r + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = \dot{I}_m (r + j(x_L - x_C)) = \dot{I}_m z e^{j\varphi}, \quad (9.4)$$

$$\text{де } \underline{z} = r + j(x_L - x_C) = z e^{j\varphi} \text{ – комплекс повного опора кола;} \quad (9.5)$$

$$\varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{r} \text{ – кут зсуву фаз між струмом і напругою.} \quad (9.6)$$

Закон Ома в комплексній формі

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{z} \quad (9.7)$$

Комплексною провідністю ділянки кола називають відношення комплексу струму до комплексу напруги на цій ділянці кола:

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{z e^{j\varphi}} = Y e^{-j\varphi} = g - jv \quad (9.8)$$

де  $g$  – активна провідність;  $v = v_L - v_C$  – реактивна провідність.

Розглянемо комплексну форму запису потужності та баланс потужностей у складних колах синусоїдного струму.

Припустимо, напруга на ділянці кола  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ , а струм  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ , кут зсуву фаз між напругою і струмом  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ . Тоді комплекс повної потужності визначається як:

$$\underline{S} = \dot{U}\dot{I} = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = P + jQ = UI\cos\varphi + UI\sin\varphi, \quad (9.9)$$

де  $\dot{I} = Ie^{-j\psi_i}$  – спряжене комплексне значення струму  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ .

Вимірювання потужності робиться ватметром, наприклад, електродинамічної системи. Ватметр має дві котушки: одна – нерухома, підключена послідовно в ділянку кола, де роблять вимір потужності, виконана товстим проводом і має маленький опір; друга – рухома, підключена паралельно ділянці кола, де роблять вимір потужності, виконана тонким проводом і має великий опір. Ватметр, показаний на рис.9.2, вимірює:

$$\operatorname{Re}[\underline{S}] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{ав}\dot{I}] = U_{ав}I \cos(\dot{U}_{ав} \wedge \dot{I}).$$

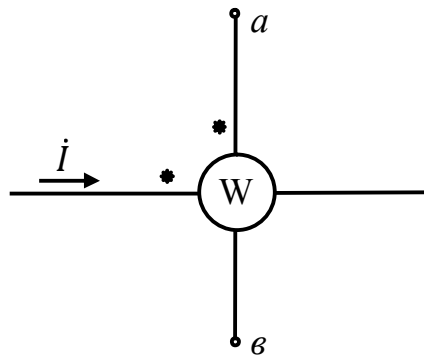


Рис.9.2

У будь-якому колі повинен виконуватися баланс як активних, так і реактивних потужностей, тобто сума всіх потужностей, що віддаються джерелами кола, повинна дорівнювати сумі потужностей, що приймаються споживачами:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{дж} &= \sum_{k=1}^m P_{сп}; \\ \sum_{k=1}^n Q_{дж} &= \sum_{k=1}^m Q_{сп}. \end{aligned}$$

### Задача 1. Розрахунок комплексної провідності нерозгалуженого кола.

Ділянка  $ав$  електричного кола, зображена на рис.9.3, має наступні параметри  $r = 10$  Ом,  $x_L = 40$  Ом,  $x_C = 50$  Ом. Записати комплексну провідність кола.



Рис.9.3

для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення комплексної провідності електричного кола;
- вміти здійснювати перехід з алгебраїчної форми запису комплексного числа до показової.

Вирішення.

1. Елементи  $r, L, C$  з'єднані послідовно, тому комплексний опір можна розрахувати за формулою (9.5):

$$\underline{z} = r + j(x_L - x_C) = 10 + j(40 - 50) = 10 - j10 = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ Ом.}$$

2. Комплексна провідність кола з (9.8)

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{14,1e^{-j45^\circ}} = 0,045e^{j45^\circ} = 0,03182 + j0,03182 \text{ См.}$$

### Задача 2. Розрахунок вхідної напруги нерозгалуженого кола комплексним методом

У колі (рис.9.4,а) діюче значення напруги  $U_1 = 24 \text{ В}$ . Параметри елементів кола:  $r_1 = 30 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $C_1 = 5 \text{ мкФ}$ ,  $C_2 = 1 \text{ мкФ}$ , кутова частота  $\omega = 5000 \text{ рад/с}$ . Визначити напругу на вході кола  $\dot{U}$ .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні співвідношення комплексного методу розрахунку;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа в комплексній формі.

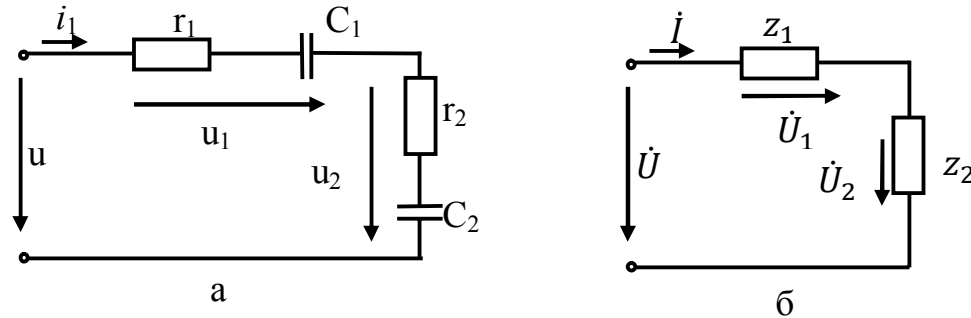


Рис.9.4

Вирішення.

1. Для розрахунку зобразимо комплексну схему заміщення (рис.9.4,б). Припустимо, що початкова фаза напруги  $u_1(t)$  дорівнює нулю. Тоді комплексна напруга на опорі  $\underline{z}_1$  набуває вигляду  $\dot{U}_1 = 24e^{j0^\circ} = 24 \text{ В}$ .

2. Знайдемо ємнісні опори:

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}; \quad x_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{5000 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ Ом};$$

3. Комплексні опори ділянок:

$$\underline{z}_1 = r_1 - jx_{C1} = 30 - j40 = 50e^{-j53,13^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{z}_2 = r_2 - jx_{C2} = 40 - j200 = 203,96e^{-j78,69^\circ} \text{ Ом}.$$

4. Комплексний струм у колі визначимо за законом Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_1}{\underline{z}_1} = \frac{24}{50e^{-j53,13^\circ}} = 0,48e^{j53,13^\circ} = (0,289 + j0,383) \text{ А}.$$

5. Комплексна напруга на опорі  $\underline{z}_2$ :

$$\dot{U}_2 = \underline{z}_2 \dot{I} = 203,96e^{-j78,69^\circ} \cdot 0,48e^{j53,13^\circ} = 97,9e^{-j25,56^\circ} = (88,2 - j42,5) \text{ В}.$$

6. Комплексну напругу на вході кола знайдемо за другим законом Кірхгофа:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 24 + 88,2 - j42,5 = 120e^{-j20,7^\circ} \text{ В}.$$

### Задача 3. Розрахунок нерозгалуженого кола комплексним методом.

Миттєве значення струму нерозгалуженого кола (рис.9.5)  $i(t) = 10 \sin(500t - 30^\circ)$ . Параметри елементів:  $r = 10 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,02 \text{ Гн}$ ;  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Визначити покази всіх приладів електродинамічної системи,



- повну, активну і реактивну потужності, скласти баланс потужностей кола.
- знати основні співвідношення комплексного методу розрахунку;
  - вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексній формі.

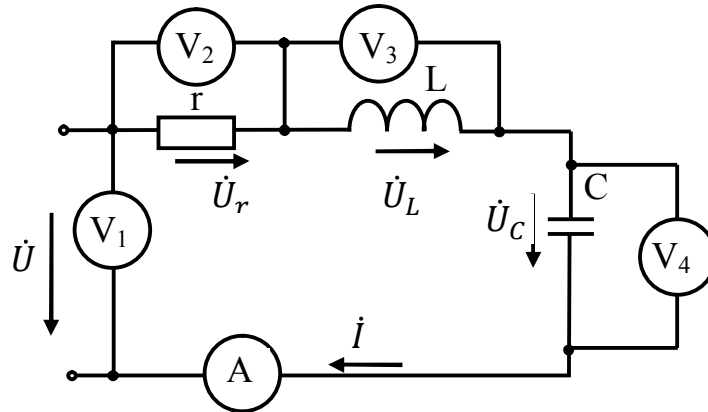


Рис.9.5

Вирішення.

1. Знайдемо комплекс повного опору кола:

$$\underline{z} = r + j(x_L - x_C) = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10 + j\left(500 \cdot 0,02 - \frac{1}{500 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right) = 10 + j(10 - 20) = 10 - j10 = 14,14e^{-j45^\circ} \text{ ом.}$$

2. Комплекс амплітуди вхідної напруги розрахуємо за законом Ома:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \underline{z} = 10e^{-j30^\circ} \cdot 14,14e^{-j45^\circ} = 141,4e^{-j75^\circ} \text{ В.}$$

3. Комплекси амплітуд напруг на елементах схеми:

$$\dot{U}_{mr} = \dot{I}_m r = 10e^{-j30^\circ} \cdot 10 = 100e^{-j30^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m jx_L = 10e^{-j30^\circ} \cdot 10e^{j90^\circ} = 100e^{j60^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{mC} = \dot{I}_m (-jx_C) = 10e^{-j30^\circ} \cdot 20e^{-j90^\circ} = 200e^{-j120^\circ} \text{ В.}$$

4. Вимірвальні прилади електродинамічної системи покажуть діючі значення струму і напруг:

$$A \implies \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ А;} \quad V_1 \implies \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{141,4}{\sqrt{2}} = 100 \text{ В;}$$

$$V_2 = V_3 \implies \frac{U_{mr}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{mL}}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70,7 \text{ В;} \quad V_4 \implies \frac{U_{mC}}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 141,2 \text{ В.}$$

5. Комплекс повної потужності:

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I} = 100e^{-j75^\circ} \cdot 7,07e^{j30^\circ} = 707e^{-j45^\circ} = (500 - j500) \text{ ВА.}$$

$$S = 707 \text{ ВА, } P = 500 \text{ Вт, } Q = -500 \text{ вар.}$$

6. Комплекс потужності, що споживається навантаженням:

$$\underline{S}_{\text{нав}} = I^2 \underline{z} = 7,07^2 \cdot 14,14e^{-j45^\circ} = 707e^{-j45^\circ} = 500 - j500 = P_{\text{нав}} - jQ_{\text{нав}}.$$

$$S = S_{\text{нав}}, P = P_{\text{нав}}, Q = Q_{\text{нав}}.$$

Таким чином, баланс потужностей виконується.

**ТЕМА 10. РОЗРАХУНОК РОЗГАЛУЖЕНИХ КІЛ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ КОМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ . ПОБУДОВА ВЕКТОРНО – ТОПОГРАФІЧНОЇ ДІАГРАМИ ДЛЯ КІЛ СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ.**

### 10.1. Загальні відомості.

Для розрахунку кіл гармонічного струму комплексним методом зручно користуватися комплексними схемами заміщення (рис.10.1). На комплексній схемі вказують комплексні опори (провідності), комплексні струми й напруги. Для розрахунку такої схеми доцільно використовувати закони Ома і Кірхгофа, а також еквівалентні перетворення так, як це робилось в колах постійного струму.

Наприклад, для визначення вхідного опору кола (рис.10.1) спочатку замінюємо паралельне з'єднання опорів  $\underline{z}_3$  і  $\underline{z}_4$  еквівалентним  $\underline{z}_{34} = \frac{\underline{z}_3 \underline{z}_4}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4}$ , а потім послідовне з'єднання опорів  $\underline{z}_1$ ,  $\underline{z}_2$ ,  $\underline{z}_{34}$  замінюємо одним еквівалентним

$$\underline{z}_e = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 + \underline{z}_{34}.$$

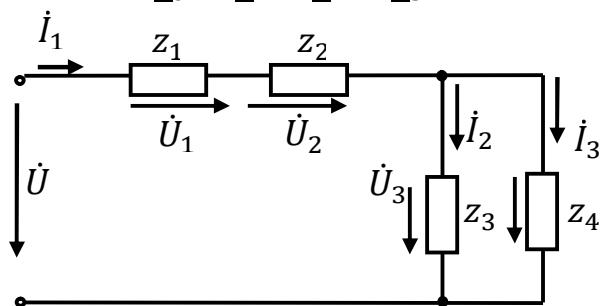


Рис.10.1

Векторні діаграми – діаграми, що зображають сукупність векторів синусоїдних величин, які розглядаються, на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації.

Топографічна діаграма – сукупність точок на комплексній площині, які зображують комплексні потенціали однойменних точок на електричній схемі. Якщо потенціали точок зображувати не точками, а векторами, то отримуємо векторно-топографічну діаграму.

Векторні діаграми струмів будують так, щоб показати виконання першого закону Кірхгофа, а векторні діаграми напруг на комплексній площині відображають другий закон Кірхгофа. наприклад, для схеми (рис.10.1) перший закон Кірхгофа для вузла 1:  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$ , відповідає векторній діаграмі на рис.10.2. Для цієї ж схеми на підставі другого закону Кірхгофа побудована векторна діаграма напруг (рис.10.3).

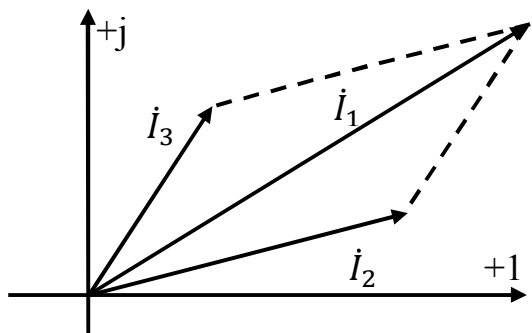


Рис.10.2

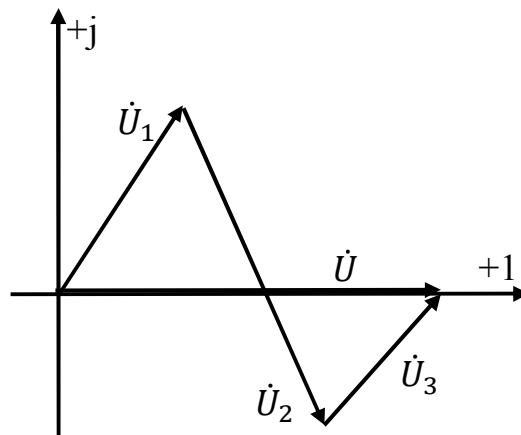


Рис.10.3

### Задача 1. Визначення миттєвих струмів розгалуженого кола комплексним методом

До кола (рис.10.4,а) прикладена напруга  $\dot{U} = 120 \text{ В}$ , опори дорівнюють:  $r_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $r_2 = 24 \text{ Ом}$ ;  $r_3 = 15 \text{ Ом}$ ;  $x_{L1} = 6 \text{ Ом}$ ;  $x_{C2} = 7 \text{ Ом}$ ;  $x_{L3} = 20 \text{ Ом}$ . Визначити миттєві струми у вітках  $i_1, i_2, i_3$ . Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення миттєвих величин;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексному вигляді.

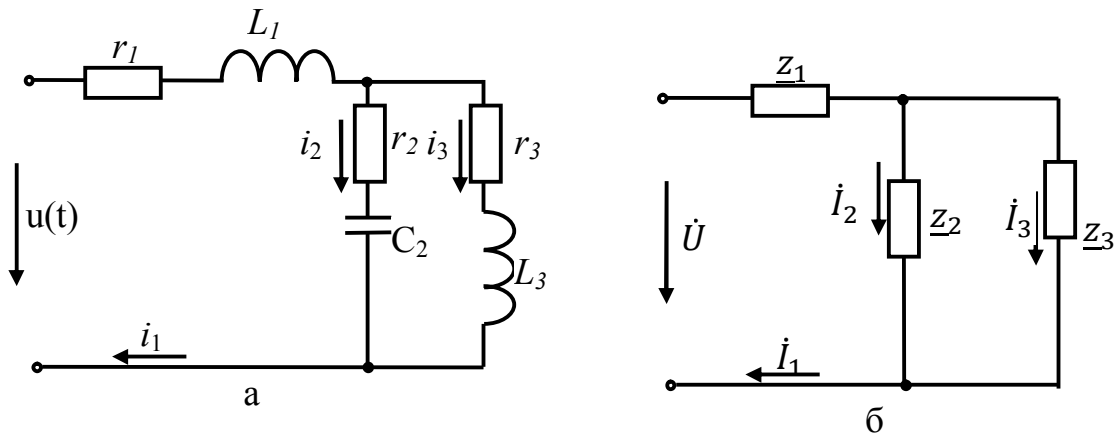


Рис.10.4

Вирішення.

1. Зобразимо комплексну схему заміщення (рис.10.4,б). Приймаємо початкову фазу вхідної напруги ( $\psi_u = 0$ ), тоді  $\dot{U} = 120e^{j0^\circ} = 120 \text{ В}$ .

2. Визначимо комплексні опори віток, Ом :

$$\begin{aligned} \underline{z}_1 &= r_1 + jx_{L1} = 10 + j6 = 11,7e^{j31^\circ}; \\ \underline{z}_2 &= r_2 - jx_{C2} = 24 - j7 = 25e^{-j16,4^\circ}; \\ \underline{z}_3 &= r_3 + jx_{L3} = 15 + j20 = 25e^{j53^\circ}. \end{aligned}$$

3. Електричне коло являє собою змішане з'єднання трьох опорів, тому еквівалентний опір:

$$\begin{aligned} \underline{z}_e &= \underline{z}_1 + \frac{\underline{z}_2 \underline{z}_3}{\underline{z}_2 + \underline{z}_3} = 10 + j6 + \frac{(24-j7)(15+j20)}{24-j7+15+j20} = 10 + j6 + 14,4 + j4,8 = \\ &= 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23,8^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

4. Визначимо за законом Ома комплексний струм на вході кола

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{z}_e} = \frac{120}{26,7e^{j23,8^\circ}} = 4,49e^{-j23,8^\circ} = 4,108 - j1,812, \text{ А}.$$

5. Комплексні струми в паралельних вітках знаходимо за правилом розкиду:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_3 + \underline{z}_2} = 4,49e^{-j23,8^\circ} \cdot \frac{25e^{j53^\circ}}{15+j20+24-j7} = 4,49e^{-j23,8^\circ} \cdot \frac{25e^{j53^\circ}}{39+j13} = \\ &= 4,49e^{-j23,8^\circ} \cdot \frac{25e^{j53^\circ}}{41,1e^{j18,4^\circ}} = \frac{112,25e^{j29,2^\circ}}{41,1e^{j18,4^\circ}} = 2,73e^{j10,8^\circ} = 2,682 + j0,511, \text{ А}; \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 \frac{\underline{z}_2}{\underline{z}_3 + \underline{z}_2} = 4,49e^{-j23,8^\circ} \cdot \frac{25e^{j53^\circ}}{39+j13} = 2,73e^{-j58,6^\circ} = 1,422 - j2,33, \text{ А}. \end{aligned}$$

Робимо перевірку за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$$

$$2,682 + j0,511 + 1,422 - j2,33 = 4,104 - j1,819 \approx 4,108 - j1,812.$$

6. Миттєві струми, А:

$$i_1(t) = 4,49 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 23,8^\circ);$$

$$i_2(t) = 2,73 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + 10,8^\circ);$$

$$i_3(t) = 2,73 \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 58,6^\circ).$$

7. Векторну діаграму струмів будуюмо на підставі рівняння, записаного за першим законом Кірхгофа, діаграму напруг – за другим законом Кірхгофа (рис.10.5):

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3;$$

$$\dot{U} = r_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 + r_2 \dot{I}_2 - jx_{C2} \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = r_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 + r_3 \dot{I}_3 + jx_{L3} \dot{I}_3.$$

Вибираємо масштаби:  $m_u = 20 \frac{B}{\text{см}}$ ,  $m_I = 1 \frac{A}{\text{см}}$ .

Для побудови векторної діаграми визначимо діючі значення напруг на елементах кола:

$$r_1 I_1 = 10 \cdot 4,49 = 44,9 B; \quad x_{L1} I_1 = 6 \cdot 4,49 = 26,9 B;$$

$$r_2 I_2 = 24 \cdot 2,73 = 65,5 B; \quad x_{C2} I_2 = 7 \cdot 2,73 = 19,1 B;$$

$$r_3 I_3 = 15 \cdot 2,73 = 41 B; \quad x_{L3} I_3 = 20 \cdot 2,73 = 54,6 B;$$

Спочатку будуюмо вектори струмів, а потім вектори напруг. Вектор  $r_1 \dot{I}_1$  збігається за напрямком із струмом  $\dot{I}_1$ , вектор  $jx_{L1} \dot{I}_1$  випереджає струм  $\dot{I}_1$  на кут  $\pi/2$ . Сума цих векторів дорівнює напрузі  $\dot{U}_1$  на опорі  $z_1$ . До кінця вектора  $\dot{U}_1$  додаємо вектор  $r_2 \dot{I}_2$ , що збігається за напрямком із струмом  $\dot{I}_2$ , і далі вектор  $(-jx_{C2} \dot{I}_2)$ , що відстає від струму  $\dot{I}_2$  на кут  $\pi/2$ . Сума цих векторів дорівнює вектору вхідної напруги  $\dot{U}$ . З кінця вектора  $\dot{U}_1$  будуюмо вектор  $r_3 \dot{I}_3$  (за струмом  $\dot{I}_3$ ), до нього додаємо вектор  $jx_{L3} \dot{I}_3$  і знову одержуємо вектор вхідної напруги  $\dot{U}$ .

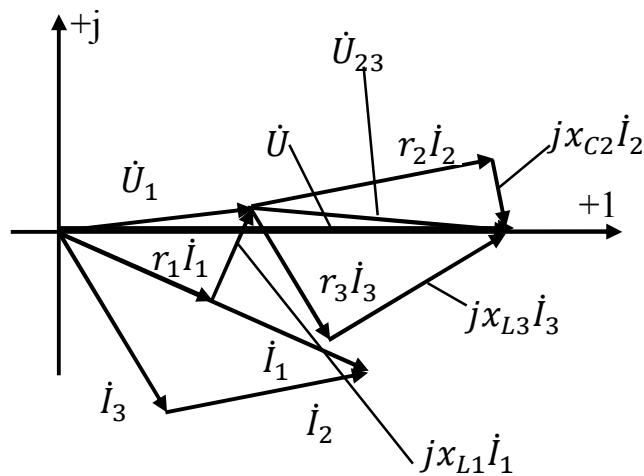


Рис.10.5

## Задача 2. Розрахунок розгалуженого кола комплексним методом.

До кола (рис.10.6) прикладена синусоїдна напруга, діюче значення якої  $U = 14,5 \text{ В}$ . Параметри елементів:  $r_1 = 50 \text{ Ом}$ ,  $r_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $r_4 = 160 \text{ Ом}$ ,  $x_{L4} = 80 \text{ Ом}$ ,  $x_{C2} = 80 \text{ Ом}$ . Визначити опір  $\underline{z}_3$ , при якому показання амперметра буде дорівнювати нулю. При цьому опорі визначити струми у вітках кола і побудувати векторну діаграму.

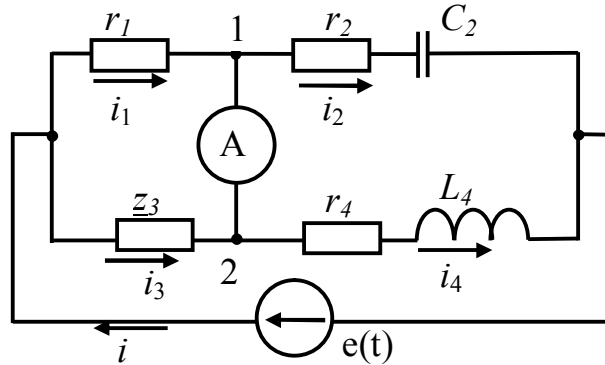


Рис.10.6

для вирішення задачі необхідно:

- знати основи комплексного методу розрахунку;
- вміти користуватися законами Ома і Кірхгофа у комплексному вигляді.

Вирішення.

1. Коло являє собою так звану мостову схему. Для того, щоб струм у вітці з амперметром дорівнював нулю, необхідно, щоб  $\dot{U}_{12} = 0$ , тоді  $\underline{z}_1 \dot{I}_1 = \underline{z}_3 \dot{I}_3$ ,  $\underline{z}_2 \dot{I}_2 = \underline{z}_4 \dot{I}_4$ , де  $\underline{z}_1 = r_1$ ,  $\underline{z}_2 = r_2 - jx_{C2}$ ,  $\underline{z}_4 = r_4 + jx_{L4}$ .

Поділивши ліві і праві частини рівнянь одна на одну і враховуючи те, що при  $\dot{U}_{12} = 0$  струми  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$ , і  $\dot{I}_3 = \dot{I}_4$ , отримаємо умову рівноваги мостової схеми:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_3}{\underline{z}_4} \text{ чи } \underline{z}_1 \underline{z}_4 = \underline{z}_2 \underline{z}_3, \text{ звідки } \underline{z}_3 = \frac{\underline{z}_1 \underline{z}_4}{\underline{z}_2} = \frac{50(160+j80)}{40-j80} = j100 \text{ Ом.}$$

Тобто у третю вітку потрібно включити індуктивність з опором  $x_{L3} = 100 \text{ Ом}$ .

2. Припустимо, що початкова фаза вхідної напруги дорівнює нулю, тоді  $\dot{U} = 14,5 \text{ В}$ .

3. Комплексні струми у вітках кола визначаємо Ома:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{z}_1 + \underline{z}_2} = \frac{14,5e^{j0^\circ}}{90 - j80} = 0,09 + j0,08 = 0,12e^{j41,8^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_4 = \frac{\dot{U}}{\underline{z}_3 + \underline{z}_4} = \frac{14,5e^{j0^\circ}}{160 + j180} = 0,04 - j0,045 = 0,0602e^{-j48^\circ} \text{ А.}$$

4. Комплексний струм у нерозгалуженій частині кола:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_3 = 0,09 + j0,08 + 0,04 - j0,045 = 0,13 + j0,035 = 0,135e^{j15^\circ} \text{ А.}$$

5. Векторні діаграми струмів і напруг (рис.5.7) будемо за рівняннями:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_3 \\ \dot{U} &= r_1 \dot{I}_1 + r_2 \dot{I}_2 - jx_{C2} \dot{I}_2; \\ \dot{U} &= jx_{L3} \dot{I}_3 + r_4 \dot{I}_4 + jx_{L4} \dot{I}_4. \end{aligned}$$

Для побудови діаграми обчислимо діючі значення напруг на всіх елементах схеми:

$$\begin{aligned} r_1 I_1 &= 50 \cdot 0,12 = 6 \text{ В}; & x_{L4} I_4 &= 80 \cdot 0,06 = 4,8 \text{ В}; \\ r_2 I_2 &= 40 \cdot 0,12 = 4,8 \text{ В}; & x_{C2} I_2 &= 80 \cdot 0,12 = 9,6 \text{ В}; \\ r_4 I_4 &= 160 \cdot 0,06 = 9,6 \text{ В}; & x_{L3} I_3 &= 100 \cdot 0,0602 = 6 \text{ В}. \end{aligned}$$

Вибираємо масштаби:  $m_u = 2 \frac{\text{В}}{\text{см}}$ ,  $m_I = 0,02 \frac{\text{А}}{\text{см}}$ .

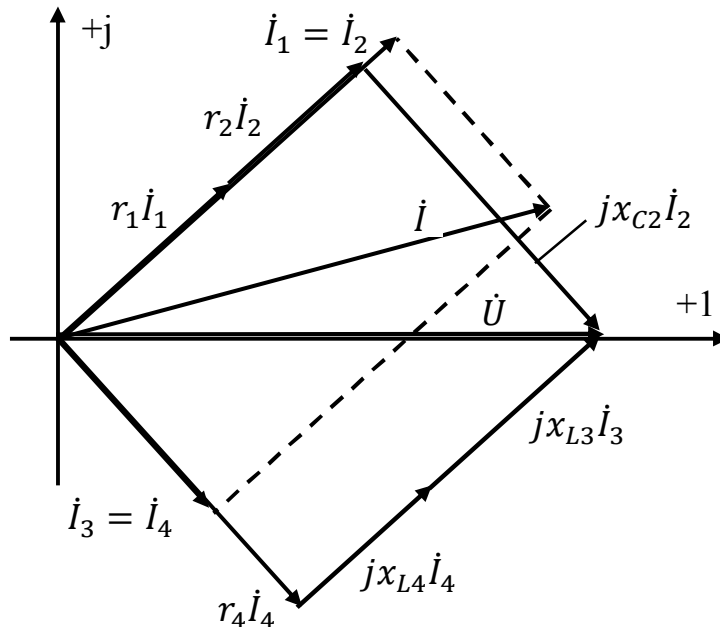


Рис.10.7

### Задача 3. Розрахунок розгалуженого кола комплексним методом.

Опір на вході електричного кола (рис.10.8)  $\underline{z}_{\text{вх}} = (5 + j11) \text{ Ом}$ .

Опір  $\underline{z}_1 = (10 + j25) \text{ Ом}$ . Визначити, яким активним опором  $r_2$  слід зашунтувати опір  $\underline{z}_1$ , щоб струм, який проходить через  $\underline{z}_1$ , відставав від вхідної напруги  $\dot{U}$  на  $90^\circ$ . Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

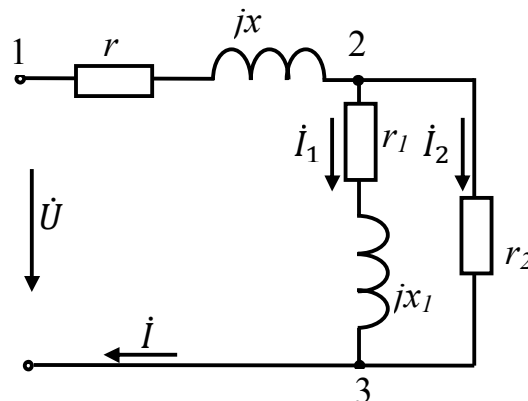


Рис.10.8

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу згортки і правила розкиду;
- вміти будувати векторно-топографічну діаграму.

### Вирішення.

1. Вхідний струм будемо визначати за законом Ома в комплексній формі

$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{BX}}}$ , де  $Z_{\text{BX}}$  – вхідний опір кола. Визначаємо  $Z_{\text{BX}}$ :

$$Z_{\text{BX}} = Z + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{ZZ_1 + ZZ_2 + Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

2. Струм  $\dot{I}_1$  визначаємо за правилом розкиду:

$$\dot{I}_1 = \dot{I} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\dot{U}}{\frac{Z Z_1}{Z_2} + Z + Z_1}.$$

3. Припустимо, що початкова фаза вхідної напруги  $\dot{U}$  дорівнює нулю. Для того, щоб струм  $\dot{I}_1$  відставав від напруги  $\dot{U}$  на  $90^\circ$ , знаменник у виразі для струму повинен бути уявним додатним числом. Отже, дійсна частина виразу повинна дорівнювати нулю. Виділимо дійсну й уявну частини знаменника у виразі для струму  $\dot{I}_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{ZZ_1}{Z_2} + Z + Z_1 &= \frac{(r_1 + jx_1)(r + jx)}{r_2} + r_1 + jx_1 + r + jx = \\ &= r_1 + r + \frac{r_1 r - x_1 x}{r_2} + j \left( x_1 + x + \frac{r_1 x + r x_1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Прирівнюємо дійсну частину до нуля

$$r_1 + r + \frac{r_1 r - x_1 x}{r_2} = 0.$$

Звідси:

$$r_2 = \frac{x_1 x - r_1 r}{r + r_1} = \frac{25 \cdot 11 - 5 \cdot 10}{5 + 10} = 15 \text{ Ом.}$$

4. Векторну діаграму (рис.10.9) будемо в наступному порядку. Відкладаємо вектор напруги  $\dot{U}$  по дійсній осі ( $\psi_u = 0$ ). Вектор струму  $\dot{I}_1$  відстає від вектора напруги  $\dot{U}$  на кут  $90^\circ$ . Будуємо напругу  $\dot{U}_{23} = r_1 \dot{I}_1 + jx_1 \dot{I}_1$ . Проводимо вектор струму  $\dot{I}_2$  (збігається за фазою з  $\dot{U}_{23}$ ). Будуємо струм  $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ . З'єднавши кінці векторів напруги  $\dot{U}_{23}$  і  $\dot{U}$ , дістанемо напругу на опорі  $Z$ :  $\dot{U}_{12} = \dot{U} - \dot{U}_{23}$ . З другого боку, напруга  $\dot{U}_{12} = r \dot{I} + jx \dot{I}$ . Тому, опустивши перпендикуляр із кінця вектора  $\dot{U}_{12}$  на струм  $\dot{I}$ , розкладемо вектор  $\dot{U}_{12}$  на дві складові.

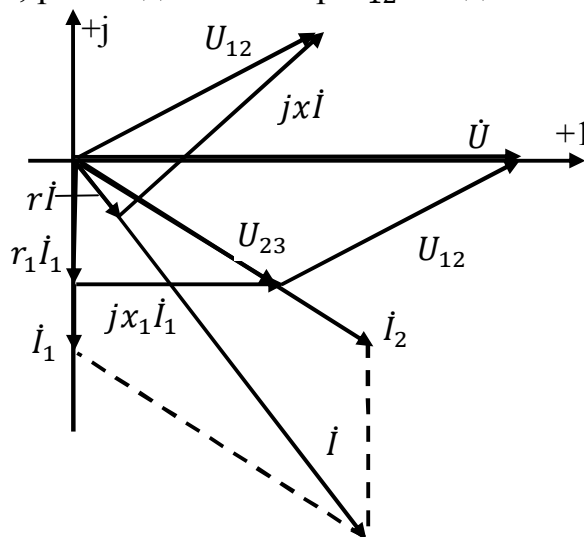


Рис.10.9

## ТЕМА 11. РЕЗОНАНС У НЕРОЗГАЛУЖЕНИХ І РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ (РЕЗОНАНС НАПРУГ І СТРУМІВ).

### 11.1 Загальні відомості

Резонансний режим – це такий режим роботи кола, що містить хоча б одну індуктивність і хоча б одну ємність, під час якого вхідний опір є чисто активним.

Розрізняють два резонансних режими:

- резонанс напруг;
- резонанс струмів.

Резонанс напруг – це такий режим роботи кола, що містить послідовно з'єднані ємності й індуктивності, під час якого вхідний реактивний опір дорівнює нулю, а струм на вході кола співпадає за фазою з вхідною напругою. Резонанс напруг відбувається в так званому послідовному коливальному контурі – рис.7.2. У такому контурі індуктивний опір компенсується ємнісним:

$$x = x_L - x_C = 0, \quad z_{вх} = r, \quad \text{а сумарна реактивна потужність } Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Домогтися резонансу можна, змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Вводимо наступні поняття:

1) резонансна частота – частота під час резонансу  $\omega_0$ , яка знаходиться з умови

$$x_L = x_C, \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{звідки} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (11.1)$$

2) хвильовий (характеристичний) опір – це ємнісний або індуктивний опір під час резонансу, тобто

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad (11.2)$$

3) добротність контуру – це відношення напруги на ємності чи напруги на індуктивності до вхідної напруги; показує в скільки разів напруга на ємності чи напруга на індуктивності більше напруги на вході під час резонансу:

$$q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L I}{I r} = \frac{\rho}{r}. \quad (11.3)$$

Резонанс струмів – такий режим роботи кола, що містить паралельне з'єднання ємності й індуктивності, за якого вхідна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм співпадає за фазою з напругою на вході кола. Під час резонансу струми в паралельних вітках можуть бути значно більшими, ніж в загальній вітці, індуктивна реактивна провідність компенсується ємнісною, реактивна потужність дорівнює нулю:

$$b = b_L - b_C = 0; \quad Q = Q_L - Q_C = 0.$$

Отримати резонанс струмів також можна, змінюючи частоту, ємність, індуктивність.

Розглянемо реальний паралельний коливальний контур (рис.11.1), до якого прикладається синусоїдна напруга  $u_C = U_m \sin(\omega t)$ . Знайдемо модулі струмів через провідності віток

$$I = UY, \quad I_1 = UY_1, \quad I_2 = UY_2, \quad (11.4)$$

де  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$ ;  $Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_1^2}$ ;  $Y_2 = \sqrt{G_2^2 + B_2^2}$ .



Активності провідності віток:

$$G_1 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{r_1}{z_1^2}; \quad G_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{r_2}{z_2^2}. \quad (11.5)$$

Повна активна провідність кола  $G = G_1 + G_2$ .

Реактивні провідності віток:

$$B_1 = B_L = \frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega L}{z_1^2}; \quad B_2 = B_C = \frac{1/\omega C}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{\omega C z_2^2}. \quad (11.6)$$

Повна реактивна провідність кола  $B = B_1 + B_2$ .

Під час резонансу загальна провідність  $Y_0 = \sqrt{(G_1 + G_2)^2} = G_1 + G_2$  є мінімальною, тому мінімальним є і загальний струм  $I_0 = UY_0 = U(G_1 + G_2)$ .

Знайдемо резонансу частоту  $\omega_0$  з умови резонансу  $B = 0$ ;  $B = B_L - B_C = 0$ ;

$$\frac{\omega_0 L}{r_1^2 + (\omega_0 L)^2} = \frac{1/\omega_0 C}{r_2^2 + (1/\omega_0 C)^2}.$$

Таким чином:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}}. \quad (11.7)$$

Явище резонансу застосовують для підвищення коефіцієнта потужності, тому що для кращого використання електричних машин і апаратів бажано мати високий коефіцієнт потужності  $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$ , тобто намагатися отримати менший зсув за фазою між струмом і напругою. Це необхідно для зменшення втрат під час передачі енергії по лініях електропередач: якщо підвищувати  $\cos \varphi$ , то струм, від якого залежить рівень втрат в проводах, можна зменшити

$$\cos \varphi \uparrow \Rightarrow I = \frac{P}{U \cos \varphi} \downarrow.$$

Паралельні резонансні контури характеризуються:

– добротністю контуру  $q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}$ ; (11.8)

– хвильовою провідністю  $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}}$  (11.9)

### Задача 1. Розрахунок параметрів електричного кола при резонансі напруг.

Електричне коло, зображене на рис.11.2, має параметри елементів  $r = 10$  Ом,  $x_L = 5$  Ом. Визначити, при якому значенні ємності  $C$  у колі відбудеться резонанс напруг.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс напруг;
- вміти користуватися комплексним методом.

Вирішення.

1. Запишемо рівняння для визначення повного комплексного опору кола:

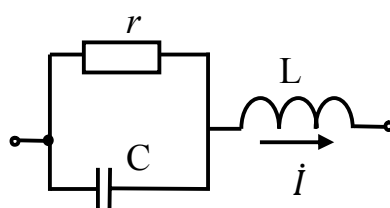


Рис.11.2

$$\underline{z} = jx_L + \frac{r(-jx_C)}{r-jx_C},$$

де  $x_C = \frac{1}{\omega C}$  – ємнісний опір;  $x_L = \omega L$  – індуктивний опір.

2. Підставимо відомі параметри в отримане рівняння повного опору і приведемо його до загального знаменника:

$$\underline{z} = j5 + \frac{10(-jx_C)}{10-jx_C} = \frac{j50-j^25x_C-j10x_C}{10-jx_C}.$$

3. Помножимо чисельник та знаменник останнього виразу на  $(10 + jx_C)$ :

$$\underline{z} = \frac{(j50-j^25x_C-j10x_C)(10+jx_C)}{(10-jx_C)(10+jx_C)} = \frac{10x_C^2+j(5x_C^2-100x_C+500)}{100+x_C^2} \text{ Ом.}$$

4. Розкладемо комплекс повного опору на дійсну і уявну частини:

$$\underline{z} = r + jx = \frac{10x_C^2}{100+x_C^2} + j \frac{5x_C^2-100x_C+500}{100+x_C^2} \text{ Ом.}$$

5. При резонансі напруг повний реактивний опір дорівнює нулю ( $x=0$ ), тому прирівнюємо до нуля коефіцієнт, що має уявну одиницю, і розв'яжемо квадратне рівняння  $5x_C^2 - 100x_C + 500 = 0$  відносно  $x_C$ . Отримуємо  $x_C = 10$  Ом.

6. Виходячи з того, що при резонансі  $x_L = \omega_p L$ , а  $x_C = \frac{1}{\omega_p C}$ , отримуємо співвідношення для визначення ємності конденсатора  $C = \frac{L}{x_L x_C} = \frac{L}{50}$ .

Таким чином, ємність конденсатора повинна бути в 50 разів меншою за індуктивність котушки  $L$ .

### Задача 2. Визначення струмів електричного кола при резонансі струмів.

Діюче значення напруги на вході електричного кола (рис.11.3)  $U = 120$  В. Параметри кола  $r_1 = r_2 = x_L = x_C = 25$  Ом. Визначити струми в колі при розімкненому й замкненому ключі  $Q$ .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс струмів;
- вміти користуватися комплексним методом.

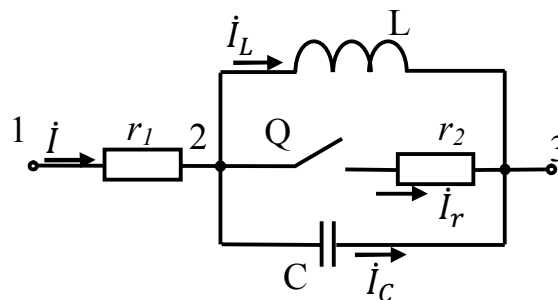


Рис.11.3

### Вирішення.

1. Визначимо комплекс повного опору кола, коли ключ розімкнутий. З вихідних даних повна реактивна провідність кола дорівнює нулю, тоді комплекс повного опору:

$$\underline{z} = r_1 + \frac{jx_L(-jx_C)}{j(x_L-x_C)} = 25 + \frac{1}{0} = \infty.$$

Тобто струм у навантаженні відсутній  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{z}} = \frac{120}{\infty} = 0$ .

2. За другим законом Кірхгофа визначаємо напругу між точками 2 і 3:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U}_{13} - \dot{U}_{12} = \dot{U}_{13} - \dot{I}r_1 = \dot{U}_{13} = 120 \text{ В.}$$

3. Визначаємо струми через індуктивний і ємнісний опори:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{23}}{jx_L} = \frac{120}{25e^{j90^\circ}} = 4,8e^{-j90^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{23}}{-jx_C} = \frac{120}{25e^{-j90^\circ}} = 4,8e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

4. Нехай ключ замкнений. При цьому маємо резонанс струмів, коли повна реактивна провідність дорівнює нулю, а струм у колі визначається активними опорами. Знайдемо комплекс провідності між точками 2 і 3 кола рис.11.3:

$$\underline{Y}_{23} = \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{jx_C} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{25e^{j90^\circ}} + \frac{1}{25e^{-j90^\circ}} + \frac{1}{25} = \frac{1}{25} \text{ См.}$$

5. Комплекс повного опору кола при замкненому ключі

$$\underline{z} = r_1 + \underline{z}_{23} = 25 + 25 = 50 \text{ Ом.}$$

6. Знайдемо комплекс вхідного струму:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{13}}{\underline{z}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{50e^{j0^\circ}} = 2,4 \text{ А.}$$

7. Визначаємо напругу між точками 2 і 3 за законом Ома:

$$\dot{U}_{23} = \frac{\dot{I}}{\underline{Y}_{23}} = 2,4 \cdot 25 = 60 \text{ В.}$$

8. Розраховуємо струми у паралельних вітках:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_{23}}{jx_L} = \frac{60}{25e^{j90^\circ}} = 2,4e^{-j90^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{23}}{-jx_C} = \frac{60}{25e^{-j90^\circ}} = 2,4e^{j90^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{I}_r = \frac{\dot{U}_{23}}{r_2} = \frac{60}{25} = 2,4 \text{ А.}$$

### Задача 3. Визначення параметрів електричного кола при резонансі струмів.

Параметри розгалуженого електричного кола, зображеного на рис.11.4:  $r_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $L_1 = 20 \text{ мГн}$ ,  $C_2 = 20 \text{ мкФ}$ . Кутова частота вхідної напруги  $\omega = 200 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Визначити, при якому значенні  $L_2$  у колі відбудеться резонанс струмів.

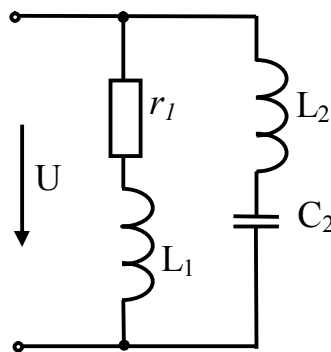


Рис.11.4

Для вирішення задачі необхідно:

- знати умови, при яких у колі відбувається резонанс струмів;
- вміти користуватися комплексним методом.

Вирішення.

1. Комплекс повної провідності першої паралельної вітки кола

$$\underline{Y}_1 = G_1 - jB_1,$$

де  $G_1 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}$  – активна провідність першої вітки;

$B_1 = \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}$  – реактивна провідність першої вітки.

Підставимо вирази для активної і реактивної провідностей у рівняння повної провідності першої вітки, отримаємо

$$\underline{Y}_1 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} - j \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2}.$$

2. Знайдемо комплекс повної провідності другої паралельної вітки кола,

$$\underline{Y}_2 = -j(B_{L2} - B_{C2}),$$

де  $B_{L2} = \frac{\omega L_2}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$  – реактивна індуктивна провідність другої вітки;

$B_{C2} = \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$  – реактивна ємнісна провідність другої вітки.

Підставимо вирази для реактивних індуктивної і ємнісної провідностей у співвідношення повної провідності другої вітки кола, отримаємо:

$$\underline{Y}_2 = -j \left( \frac{\omega L_2}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{\omega C_2}}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} \right) = -j \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}.$$

3. Запишемо рівняння повної провідності кола як суму провідностей першої і другої віток.

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} - j \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} - j \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} = \\ &= \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} - j \left( \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) = G - jB. \end{aligned}$$

4. Резонанс струмів відбудеться у колі рис.11.4, якщо повна реактивна провідність кола буде дорівнювати нулю:

$$\left( \frac{\omega L_1}{r_1^2 + (\omega L_1)^2} + \frac{1}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) = 0.$$

5. Виразимо з отриманого співвідношення індуктивний опір  $L_2$

$$L_2 = \frac{\frac{L_1}{C_2} - (r_1^2 - (\omega L_1)^2)}{\omega^2 L_1} = \frac{\frac{0,02}{6,25 \cdot 10^{-6}} - (20^2 - (200 \cdot 0,02)^2)}{200^2 \cdot 0,02} = 3,48 \text{ Гн.}$$

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник.- М.: Гардарики, 2002. – 640 с.
3. Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Загальна електротехніка: теорія і практикум: Підручник. – К.: Каравела, 2004.–317 с.
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 4-е издание, дополненное для самостоятельного изучения курса, в 3-х томах. – Л.: «Питер», 2004.
5. Шебес М.Р. Сборник упражнений и задач по теории электрических цепей. М.: Высшая школа, 1980.
6. Шуліка В.П., Паляниченко І.К., Мазуренко О.Г. Тексти лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» .Ч.1. Електричні та магнітні кола постійного струму.– К.: НУХТ, 2007.
7. Шуліка В.П., Мазуренко О.Г., Журавков О.В. Тексти лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» .Ч.2. Електричні кола змінного струму.– К.: НУХТ, 2009.
8. Шуліка В.П., Мазуренко О.Г., Журавков О.В. Тексти лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» .Ч.3. – К.: НУХТ, 2011.–250 с.

61  
ЗМІСТ

<b>ТЕМА 1.</b> Розрахунок простих кіл постійного струму.	
1.1. Визначення струму на ділянці кола за законом Ома. Еквівалентне перетворення джерел енергії.....	3
<b>ТЕМА 2.</b> Розрахунок розгалужених кіл постійного струму за законами Кірхгофа . Складання балансу потужностей. Побудова потенційної діаграми.	
2.1 Загальні відомості.....	10
<b>ТЕМА 3.</b> Розрахунок розгалужених кіл постійного струму методом контурних струмів.	
3.1. Загальні відомості.....	15
<b>ТЕМА 4.</b> Розрахунок розгалужених кіл постійного струму методом вузлових потенціалів. Метод двох вузлів.	
4.1 Загальні відомості.....	21
<b>ТЕМА 5.</b> Вхідні й взаємні провідності. Застосування заміни кількох паралельних віток, що містять джерела ЕРС та опори, однією еквівалентною.	
5.1. Загальні відомості.....	26
<b>ТЕМА 6.</b> Розрахунок розгалужених кіл постійного струму методом накладання. Розрахунок розгалужених кіл постійного струму методом еквівалентного генератора.	
6.1 Загальні відомості.....	30
<b>ТЕМА 7.</b> Кола однофазного синусоїдного струму.	
7.1. Загальні відомості.....	36
<b>ТЕМА 8.</b> Зображення синусоїдних величин комплексними числами. Форми запису комплексного числа. Перехід від миттєвих значень до комплексних і навпаки.	
8.1 Загальні відомості .....	42
<b>ТЕМА 9.</b> Розрахунок нерозгалужених кіл синусоїдного струму комплексним (символічним) методом. Баланс потужностей у колах однофазного синусоїдного струму.	
9.1. Загальні відомості.....	46
<b>ТЕМА 10.</b> Розрахунок розгалужених кіл синусоїдного струму комплексним методом. Побудова векторно-топографічної діаграми для кіл синусоїдного струму.	
10.1. Загальні відомості.....	49
<b>ТЕМА 11.</b> Резонанс у нерозгалужених і розгалужених колах змінного струму (резонанс напруг і струмів).	
11.1. Загальні відомості.....	56
Рекомендована література.....	61
Зміст .....	62

